

**В.Н. Блинков, Г.А. Горбенко, А.О. Костиков**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ТЕПЛОТЕХНИКИ**

**Часть 3. Основы теплопередачи в объектах  
аэрокосмической техники**

**2006**

*Министерство образования и науки Украины*  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»

**В.Н. Блинков, Г.А. Горбенко, А.О. Костиков**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ТЕПЛОТЕХНИКИ**

**Часть 3. Основы теплопередачи в объектах  
аэрокосмической техники**

Конспект лекций

Харьков «ХАИ» 2006

УДК 621.1.016.4

Теоретические основы аэрокосмической теплотехники. Ч. 3. Основы теплопередачи в объектах аэрокосмической техники /В.Н. Блинков, Г.А. Горбенко, А.О. Костиков. – Конспект лекций. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – 128 с.

Представлены содержательные и математические модели процессов теплопроводности, конвективного и радиационного теплообмена. По каждому виду процессов даны основной закон передачи теплоты и вытекающая из него постановка задачи, указаны методы ее решения, проиллюстрированные на классических примерах. Рассмотрены также задачи сложного теплопереноса, элементы тепловой защиты, основы расчета теплообменников и термоциркуляционных контуров.

Для студентов авиационных и ракетно-космических специальностей высших учебных заведений.

Ил. 23. Библиогр.: 15 назв.

Рецензенты: акад. НАН Украины Ю.М. Мацевитый,  
д-р техн. наук, проф. Э.Г. Братута

© Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт», 2006 г.

# Глава 11. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

## 11.1. Закон Фурье

### 11.1.1. Исходные понятия и определения

*Теплопроводностью* (кондукцией) называют самопроизвольный необратимый процесс переноса внутренней (тепловой) энергии в пространстве с неоднородным распределением температуры, обусловленный взаимодействием микрочастиц тела. В газах и жидкостях такими частицами являются молекулы, в металлах – электроны, ионы, атомы.

В инженерной теплопередаче не рассматривают «механизм» переноса тепловой энергии, а устанавливают связь между конечным результатом процесса и его «движущими» факторами. Поэтому здесь в качестве содержательной модели тел принимают воображаемую *сплошную среду*, макроскопические характеристики которой распределены в пространстве непрерывным образом. Дискретность реальных тел, если она влияет на процесс теплообмена, учитывают, приписывая среде некоторые макроскопические свойства, также распределенные непрерывно.

Для процесса теплопереноса существенны две основные характеристики: неоднородность распределения температуры (движущий фактор) и количество переданной энергии (конечный результат).

В отличие от равновесной термодинамики, где температура характеризует макроскопическую систему в целом, в теории теплообмена, как и в гидрогазодинамике, значения температуры указывают для *элементарных объемов сплошной среды*. Такие объемы должны содержать количество микрочастиц, обеспечивающее статистически устойчивое значение температуры и других макропараметров. В то же время эти объемы должны быть достаточно малы по сравнению с рассматриваемым телом для того, чтобы их можно было считать точками в математическом смысле.

С учетом сказанного *температуру*  $T$  [К] в теории теплообмена характеризуют скалярным полем  $T(x, y, z, t)$ , где  $x, y, z$  – декартовы координаты элементарных объемов сплошной среды (точек пространства),  $t$  – время. Если поле  $T$  явно не зависит от времени, его называют *стационарным*. В данный момент времени геометрический образ температурного поля дает семейство изотермных поверхностей (геометрических мест точек, имеющих одинаковую температуру) или изотерм (линий пересечения изотермных поверхностей с какой-либо плоскостью).

Скалярному полю  $T(x, y, z, t)$  можно поставить в соответствие векторное поле *градиента температуры*  $\text{grad } T(x, y, z, t)$ . Последний вводят обычным образом:

$$\text{grad } T = \vec{n} \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad [\text{K}/\text{m}], \quad (11.1)$$

где  $\Delta n$  – расстояние между изотермными поверхностями, температуры которых различаются на  $\Delta T$  (рис. 11.1). Это расстояние отсчитывают в данной точке по нормали  $\vec{n}$  к поверхности, а саму нормаль направляют в сторону роста температуры.

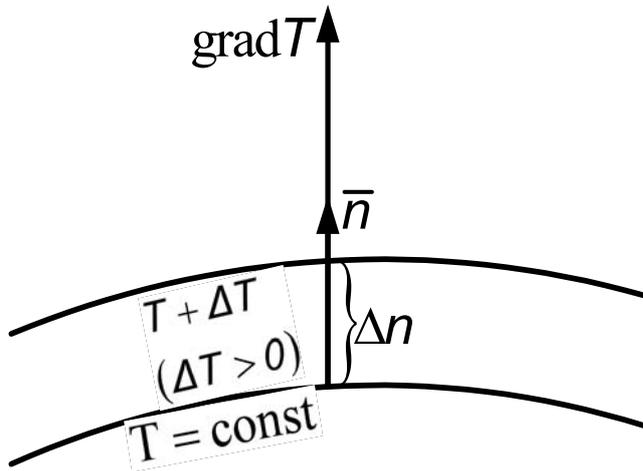


Рис. 11.1

Определение (11.1) можно записать как

$$\text{grad } T = \vec{\nabla} T, \quad (11.2)$$

где

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (11.3)$$

представляет собой векторный дифференциальный оператор Гамильтона ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты осей  $x, y, z$ ).

*Теплоту*, то есть количество энергии, переданной в ходе теплообмена, характеризуют

вектором *плотности теплового потока*  $\vec{q}(x, y, z, t)$ , модуль которого равен теплоте, проходящей через единицу площади изотермной поверхности в единицу времени. Вектор  $\vec{q}$  направлен перпендикулярно этой поверхности и, согласно второму закону термодинамики, обращен в сторону уменьшения температуры; его размерность  $[q] = \text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}) = \text{Вт}/\text{м}^2$ .

Для определения количества теплоты  $Q$ , прошедшей в единицу времени через произвольную поверхность  $A$ , необходимо интегрировать поле  $\vec{q}(x, y, z, t)$  по ней:

$$Q = \int_A \vec{n} \cdot \vec{q} dA = \int_A q_n dA, \quad (11.4)$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к участку  $dA$  поверхности  $A$ . Величину  $Q$ , Вт, называют *тепловым потоком*.

### 11.1.2. Основной закон теплопроводности

Этот закон устанавливает пропорциональность векторов плотности теплового потока и градиента температуры в виде

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T, \quad (11.5)$$

где макроскопическая величина  $\lambda$  (*коэффициент теплопроводности*) характеризует способность конкретной сплошной среды «проводить» определенное количество теплоты при заданном градиенте температуры. Свойство теплопроводности приписывают воображаемой сплошной среде для учета самопроизвольного процесса переноса тепловой энергии, реально происходящего в результате взаимодействия микрочастиц тела.

Значение коэффициента теплопроводности конкретных материалов находят опытным путем как функцию температуры; для газов  $\lambda$  еще зависит от давления. Сведения о величине коэффициентов теплопроводности конструкционных материалов, жидкостей и газов, применяемых в аэрокосмических объектах, можно найти в справочниках.

Формула (11.5) представляет собой обобщенное математическое выражение *гипотезы Фурье*, согласно которой количество теплоты, переданной в направлении  $\mathbf{n}$  через площадку  $\Delta A$ , пропорционально ее величине и производной температуры по направлению  $\mathbf{n}$ . Гипотеза эта многократно подтверждена опытом, поэтому соотношение (11.5) называют аналитическим выражением *закона Фурье*: вектор плотности теплового потока пропорционален соответствующему градиенту температуры. Уравнение (11.5) позволяет решить ряд простейших задач стационарной теплопроводности (см. подразд. 11.3).

## 11.2. Краевая задача теплопроводности

### 11.2.1. Дифференциальное уравнение теплопроводности

В общем случае для решения задач теплопроводности (нахождения полей  $T$  и  $\vec{q}$ ) соотношения (11.5) недостаточно. Здесь необходима постановка краевой задачи, представляющей собой совокупность дифференциального уравнения теплопроводности и условий однозначности (краевых условий).

Упомянутое дифференциальное уравнение есть математическое выражение первого закона термодинамики (закона сохранения энергии) применительно к процессу переноса теплоты в твердых телах.

Согласно этому закону (см. формулы 2.1 и 7.6), изменение тепловой (внутренней) энергии  $U$  в некотором объеме  $V$  твердого тела без теплоисточников может происходить лишь в результате теплообмена посредством теплопроводности на поверхности  $A$ , ограничивающей указанный объем (если деформация объема вследствие изменения температуры пренебрежимо мала). Рассматривая изменение энергии за единичный промежуток времени (рис. 11.2), имеем

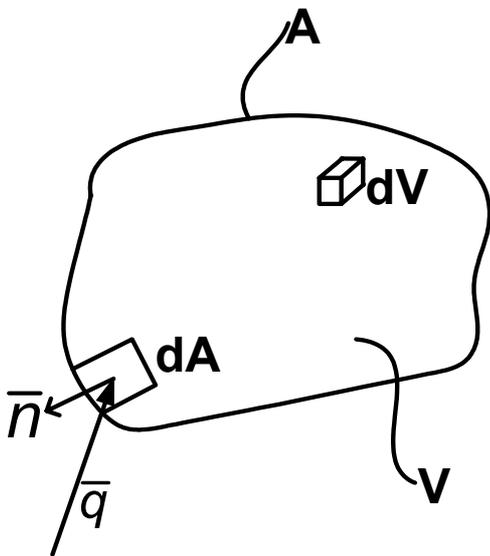


Рис. 11.2

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u \, dV = - \int_A \vec{n} \cdot \vec{q} \, dA, \quad (11.6)$$

где  $\rho$  – плотность тела,  $u$  – удельное значение внутренней энергии.

При отсутствии температурной деформации  $\rho$  не меняется во времени, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u \, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) \, dV = \int_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dV,$$

а по теореме Гаусса – Остроградского

$$\int_A \vec{n} \cdot \vec{q} \, dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \, dV,$$

так что уравнение (11.6) можно переписать

так:

$$\int_V \left[ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \right] dV = 0.$$

В силу произвольности объема  $V$  последнее равенство дает

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{q} = 0$$

при условии непрерывности функций, находящихся под знаком интеграла. Поскольку для твердых тел  $du = c dT$ , после замены  $\vec{q}$  по закону Фурье (11.5) имеем

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T),$$

или

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (11.7)$$

В случае изотропного однородного тела дифференциальное уравнение теплопроводности (11.7) принимает вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2},$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \vec{\nabla}^2 T, \quad (11.8)$$

где  $a = \lambda / (\rho c)$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ , являющийся мерой теплоинерционных свойств тела (его можно рассматривать как физическое свойство вещества). Уравнение Фурье–Кирхгофа (11.8) устанавливает связь между временным и пространственным изменениями температуры в любой точке тела.

Если в теле имеются распределенные источники тепловыделения с объемной плотностью (мощностью)  $q_v$ ,  $\text{Вт}/\text{м}^3$ , то записанные выше уравнения примут вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + q_v;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \vec{\nabla}^2 T + \frac{q_v}{\rho c}. \quad (11.9)$$

В случае стационарного поля температуры (стационарного теплового режима) дифференциальное уравнение теплопроводности для тела с внутренним тепловыделением превращается в уравнение Пуассона:

$$\vec{\nabla}^2 T + q_v / \lambda = 0. \quad (11.10)$$

При отсутствии источников теплоты стационарное поле температуры удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\vec{\nabla}^2 T = 0. \quad (11.11)$$

### 11.2.2. Условия однозначности для задач теплопроводности

Чтобы выделить конкретную задачу из бесчисленного их множества, описываемого дифференциальным уравнением теплопроводности, необходимо присоединить к этому уравнению математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Это описание называют *условиями однозначности*; оно включает условия геометрические, физические, начальные, граничные.

*Геометрические условия* характеризуют форму и размеры тела (расчетной области), *физические условия* дают сведения о свойствах тела ( $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$ ) и распределении внутренних источников теплоты, *начальные условия* (существенны для нестационарных задач) описывают поле температуры в начальный момент времени  $t = 0$ .

*Граничные условия* отражают тепловое взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой. Оно может быть охарактеризовано различным образом. Так, граничное условие 1-го рода дает распределение температуры на поверхности тела, 2-го рода – значение ее производных здесь на этой поверхности. Граничное условие 3-го рода информирует о температуре окружающей текучей среды

(жидкости или газа) и законе теплообмена между нею и поверхностью тела, а граничное условие 4-го рода устанавливает правило сопряжения температурных полей рассматриваемого тела и контактирующих с ним других твердых тел.

### **11.2.3. Методы решения краевой задачи теплопроводности**

Сложность решения краевой задачи зависит от ее типа (размерности задачи, формы расчетной области, вида условий однозначности).

Аналитические решения получены в основном при существенных упрощениях. Например, в подразд. 11.3 представлены простейшие задачи стационарной теплопроводности для плоской и цилиндрической стенок без тепловыделений с равномерным распределением температуры на поверхностях. Двумерные задачи (см. подразд. 11.4 и 11.5) более сложны; их решение удается представить лишь бесконечным рядом с использованием экспоненты, а также функций тригонометрических и бесселевых (для плоской и осесимметричной геометрии соответственно). Решения задач такого типа обычно приводят не в учебниках, а в специальных монографиях.

В более сложных случаях используют численные методы, реализуемые на ЭВМ. Недостатком такого подхода является то, что численное решение отвечает конкретной задаче (с фиксированными параметрами), в то время как аналитическое решение позволяет установить влияние всех аргументов на распределение температуры в задачах данного класса. Указанный недостаток численных методов компенсируется быстродействием современных ЭВМ, что дает возможность установить упомянутое влияние аргументов посредством численного эксперимента.

## **11.3. Простейшие математические модели процессов стационарной теплопроводности**

### **11.3.1. Однородная плоская стенка без тепловыделения с $\lambda = \text{const}$**

Рассмотрим поле температуры в такой стенке толщиной  $\delta$ , размещенной перпендикулярно оси  $x$  (рис. 11.3). Если стенка не ограничена по  $y$  и  $z$ , а температура на поверхностях ее распределена равномерно, то уравнение теплопроводности (11.11) принимает вид  $d^2T/dx^2 = 0$ .

Первое интегрирование его дает  $dT/dx = C_1$ , второе  $T = C_1x + C_2$ , то есть температура изменяется по толщине стенки

линейно (рис. 11.3). Постоянные интегрирования находим из граничных условий.

Пусть заданы граничные условия 1-го рода:  $T = T_{w1}$  при  $x = 0$  и  $T = T_{w2}$  при  $x = \delta$ .

Подставив их в найденное решение, имеем  $C_2 = T_{w1}$ ,

$$C_1 = (T_{w2} - T_{w1}) / \delta.$$

Таким образом,

$$T = T_{w1} - \Delta T_{\delta} x / \delta, \quad (11.12)$$

где  $\Delta T_{\delta} = T_{w1} - T_{w2}$  – перепад температуры (*температурный напор*) в стенке.

Согласно закону Фурье,  $q_n = -\lambda(\partial T / \partial n)$ , и для рассматриваемого случая ( $q_n = q_x = q$ ) будет

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (T_{w1} - T_{w2}). \quad (11.13)$$

Для участка стенки площадью  $A$  тепловой поток  $Q_A = qA = \lambda(T_{w1} - T_{w2})A / \delta$ , или  $Q_A = \Delta T_{\delta} / R_{\lambda A}$ , где  $R_{\lambda A} = \delta / \lambda A$  – термическое сопротивление теплопроводности этого участка. Соответственно, удельное (приходящееся на единицу площади поперечного сечения) значение *термического сопротивления теплопроводности* плоской стенки будет:

$$R_{\lambda уд} = \delta / \lambda. \quad (11.14)$$

### 11.3.2. Влияние неоднородности стенки

Если все ограничения подразд. 11.3.1 сохраняются, но стенка состоит из нескольких слоев, имеющих разные значения  $\lambda$ , то с учетом полученного выше решения для каждого из слоев имеем

$$q = \frac{\lambda_i}{\delta_i} (T_{wi} - T_{wi+1}).$$

Определив отсюда температурные напоры на всех слоях и сложив полученные равенства, придем к выражению

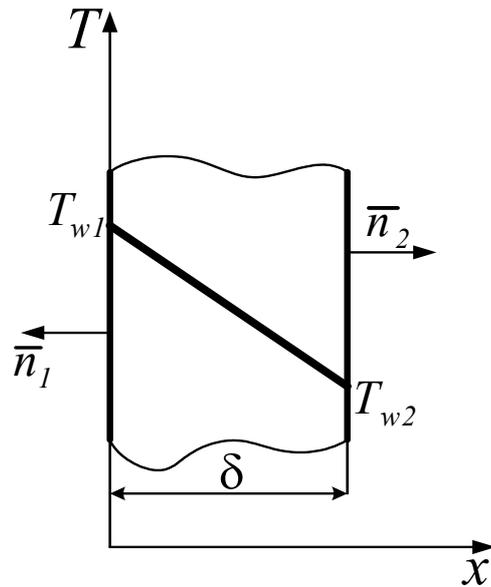


Рис. 11.3

$$T_{w_1} - T_{w_{n+1}} = q \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

При граничных условиях первого рода эта формула позволяет вычислить плотность теплового потока  $q$  и далее найти температуру на «правой стороне» слоя с номером  $j$ :

$$T_{w_{j+1}} = T_{w_1} - q \sum_{i=1}^j \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \quad (11.15)$$

В пределах каждого слоя распределение температуры линейно, а для всей составной стенки оно будет представлено ломаной.

Как видно из полученного выражения, термические сопротивления теплопроводности последовательно расположенных элементов складываются непосредственно.

Для многослойной стенки можно ввести *эквивалентный коэффициент теплопроводности*  $\lambda_{\text{ЭКВ}}$ , исходя из равенства

$$T_{w_1} - T_{w_{n+1}} = q \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} = q \frac{\delta_{\Sigma}}{\lambda_{\text{ЭКВ}}},$$

где  $\delta_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \delta_i$  – суммарная толщина стенки. Тогда

$$\lambda_{\text{ЭКВ}} = \delta_{\Sigma} / \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \quad (11.16)$$

Введением  $\lambda_{\text{ЭКВ}}$  многослойная стенка сводится к эквивалентной однородной (эквивалентной по результирующему перепаду температуры, вызываемому заданным  $q$ ).

Приведенное решение задачи для многослойной стенки соответствует случаю идеального теплового контакта между слоями. Иначе говоря, здесь отсутствуют контактные термические сопротивления (см. подразд. 11.5).

### 11.3.3. Влияние зависимости коэффициента теплопроводности от температуры

Эту зависимость учтем при прочих ограничениях, отвечающих подразд. 11.3.1, считая линейной связь  $\lambda = \lambda(T)$ :

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \epsilon T). \quad (11.17)$$

Здесь величина  $T$  отсчитана от значения температуры, при которой  $\lambda = \lambda_0$ .

С учетом формулы (11.17) закон Фурье для плоской стенки можно записать в виде  $q = -\lambda_0(1 + \epsilon T)dT/dx$ . Разделяя переменные, проинтегрируем это выражение в пределах:  $x$  от 0 до  $\delta$ ,  $T$  от  $T_{w1}$  до  $T_{w2}$ :

$$q\delta = \lambda_0 \left[ 1 + \epsilon \frac{(T_{w1} + T_{w2})}{2} \right] (T_{w1} - T_{w2}).$$

Полученную формулу можно переписать так:

$$q = \frac{\lambda_{cp}}{\delta} (T_{w1} - T_{w2}), \quad (11.18)$$

где

$$\lambda_{cp} = \frac{1}{T_{w1} - T_{w2}} \int_{T_{w2}}^{T_{w1}} \lambda(T) dT \quad (11.19)$$

есть *среднеинтегральное значение коэффициента теплопроводности* в рассматриваемом интервале температур.

Сравнивая зависимость (11.18) с формулой (11.13), которая выведена для стенки с  $\lambda = \text{const}$ , видим, что последнюю можно использовать и для случая  $\lambda = \lambda(T)$ , если заменить в ней  $\lambda$  на  $\lambda_{cp}$ .

Интегрируя записанную выше связь  $q$  и  $T$  в пределах  $0 \leftrightarrow x$ ,  $T_{w1} \leftrightarrow T$ , получим зависимость для расчета распределения температуры по толщине стенки:

$$\begin{aligned} qx &= -\lambda_0 \left[ (T - T_{w1}) + \frac{\epsilon}{2} (T^2 - T_{w1}^2) \right]; \\ T^2 + \frac{2}{\epsilon} T + \left( \frac{2qx}{\epsilon\lambda_0} - \frac{2}{\epsilon} T_{w1} - T_{w1}^2 \right) &= 0; \\ T &= -\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{2qx}{\lambda_0\epsilon} + \frac{2}{\epsilon} T_{w1} + T_{w1}^2}. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Как видно, распределение температуры при  $\lambda = \lambda(T)$  не является линейным; характер температурной кривой определяется знаком и численным значением коэффициента  $\epsilon$ .

### 11.3.4. Влияние кривизны стенки

Это влияние рассмотрим на примере однородной неограниченной по высоте цилиндрической стенки с равномерным распределением температур на поверхностях и  $\lambda = \text{const}$  при отсутствии тепловыделений (рис. 11.4).

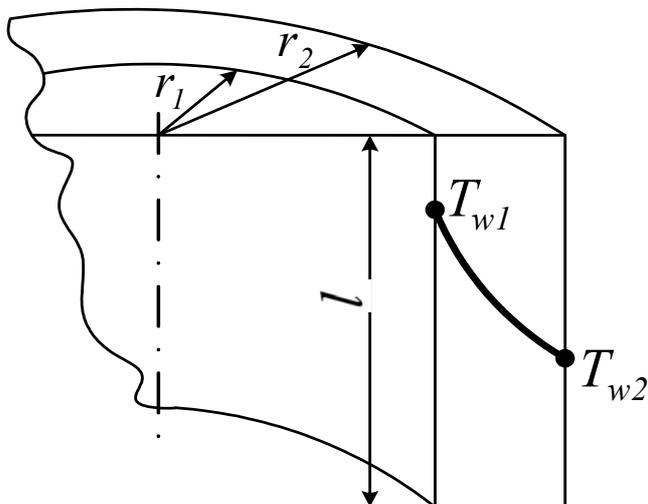


Рис. 11.4

Несмотря на последнее обстоятельство, для такой стенки плотность теплового потока изменяется по радиусу, так как функцией радиуса есть площадь сечения, перпендикулярного к направлению теплового потока. Поэтому здесь закон Фурье целесообразно записать в виде

$$\frac{Q}{2\pi r l} = -\lambda \frac{dT}{dr},$$

где  $Q$  – тепловой поток через цилиндрическую поверхность  $2\pi r l$ .

Интегрируя это выражение в пределах  $r_1 \leftrightarrow r_2$ ,  $T_{w1} \leftrightarrow T_{w2}$  и  $r_1 \leftrightarrow r$ ,  $T_{w1} \leftrightarrow T$ , получим соответственно

$$\frac{Q}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} = T_{w1} - T_{w2}$$

и

$$\frac{Q}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r}{r_1} = T_{w1} - T,$$

откуда

$$T = T_{w1} - (T_{w1} - T_{w2}) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (11.21)$$

Как видно, распределение температуры по толщине цилиндрической стенки является логарифмическим. Термическое сопротивление теплопроводности такой стенки:

$$R_\lambda = \frac{\Delta T_\delta}{Q} = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Относя температурный напор  $\Delta T_{\delta} = T_{w_1} - T_{w_2}$  к *линейной плотности теплового потока*  $q_{\ell} = Q/\ell$ , получим *линейное термическое сопротивление теплопроводности* цилиндрической стенки:

$$R_{\lambda \ell} = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (11.22)$$

Часто под  $R_{\lambda \ell}$  понимают величину  $\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}$ , тогда связь между температурным напором и этим сопротивлением следует брать в виде  $\Delta T_{\delta} = q_{\ell} R_{\lambda \ell} / \pi$ .

Для многослойной цилиндрической стенки вместо (11.22) будет

$$R_{\lambda \ell} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \quad (11.23)$$

при идеальном тепловом контакте слоев.

#### 11.4. Двумерное поле температуры (плоская задача)

Стационарное распределение температуры в теле без тепловыделений отвечает уравнению Лапласа (11.11). Если температура может изменяться лишь вдоль осей  $x$  и  $y$ , имеем

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (11.24)$$

Следуя предложенному Фурье методу разделения переменных, ищем решение в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от  $x$ , другая – только от  $y$ :

$$T(x, y) = \varphi(x)\psi(y). \quad (11.25)$$

Подставив это выражение в уравнение (11.24), имеем

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Поскольку здесь левая часть не зависит от  $x$ , а правая – от  $y$ , обе они должны быть равны некоторой константе. Взяв ее в виде  $k^2$ , имеем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi = 0;$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - k^2\psi = 0.$$

Тем самым уравнение в частных производных (11.24) сведено к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение первого из них имеет вид

$$\varphi = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx,$$

второго

$$\psi = C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky},$$

так что общее решение исходного уравнения (11.24), согласно выражению (11.25), запишем в форме

$$T(x, y) = (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)(C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky}). \quad (11.26)$$

Значения констант  $C$  следует искать, опираясь на граничные условия.

Пусть они имеют вид  $T = T_i$  на поверхностях плоской стенки  $x = 0$  и  $x = \ell$ ;  $T = T_j$  при  $y = 0$  и  $T \rightarrow T_i$  при  $y \rightarrow \infty$  (рассматриваем полосу толщиной  $\delta$ , высота которой  $h = y$  много больше ширины  $\ell$ , а поверхности  $z = 0$  и  $z = \delta$  теплоизолированы).

В данной задаче удобнее работать с «избыточной» температурой  $\vartheta = T - T_i$ , для которой решение (11.26) действительно после замены  $T$  на  $\vartheta$ , а граничные условия переписываются так:  $\vartheta = 0$  при  $x = 0$  и  $x = \ell$ ;  $\vartheta = \vartheta_j$  при  $y = 0$ ;  $\vartheta \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ .

Поскольку при  $x = 0$   $\cos kx = 1$ , условие  $\vartheta = 0$  требует значения  $C_1 = 0$ . Это же условие побуждает взять  $\sin k\ell = 0$ , ибо  $C_2$  не может быть равным нулю (нас не интересуют решения  $\vartheta \equiv 0$ ). Следующие отсюда величины  $k$  ( $k_n = n\pi/\ell$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) называют собственными значениями, а отвечающие им решения – собственными функциями. Обратимся теперь к граничному условию  $\vartheta \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ . Оно означает, что  $C_3 = 0$  (ибо  $e^{ky}$  неограниченно возрастает в случае  $y \rightarrow \infty$ ).

В итоге решение (11.26) сводится к виду

$$\vartheta = C \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) e^{-(n\pi/\ell)y}, \quad (11.27)$$

где  $C = C_2 C_4$ . Однако ни одно из этих частных решений ни при каком выборе  $C = C_n$  не удовлетворяет оставшемуся граничному условию, если  $T_j - T_i \neq 0$ .

Чтобы удовлетворить ему, необходимо образовать из частных решений сходящуюся бесконечную сумму

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) e^{-(n\pi/\ell)y}, \quad (11.28)$$

коэффициенты  $C_n$  которой должны быть равны соответствующим коэффициентам  $\epsilon_n$  ряда Фурье, в который раскладывают функцию  $\vartheta_j$ :

$$\vartheta_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right),$$

где

$$\epsilon_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \vartheta_j(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (11.29)$$

При переходе от решения (11.27) к ряду (11.28) было использовано то обстоятельство, что сумма частных решений линейного однородного дифференциального уравнения также является его решением.

Окончательное выражение для поля избыточной температуры  $\vartheta(x, y)$  запишем в случае, когда  $T_j = \text{const}$ . Согласно формуле (11.29), здесь

$$\epsilon_n = \frac{2\vartheta_j}{\ell} \int_0^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx = - \frac{2\vartheta_j}{n\pi} \cos\frac{n\pi}{\ell} x \Big|_0^{\ell},$$

откуда получаем  $C_n = 4\vartheta_j / (n\pi)$  при  $n = 1, 3, 5, \dots$  (если  $n = 2, 4, 6, \dots$ , то  $C_n = 0$ ). В итоге решение (11.28) принимает вид

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_j} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) e^{-(n\pi/\ell)y}.$$

### 11.5. Модель контактной теплопроводности

Таким термином определяют описание теплопереноса в зоне стыка сопряженных элементов тепловой системы, в которых энергия передается посредством теплопроводности.

Вследствие шероховатости, волнистости и макроотклонений поверхностей соприкасающиеся твердые тела контактируют лишь в отдельных точках («пятнах») или группах точек, а не по всей номинальной площади контакта.

Это обстоятельство ведет к «стягиванию» линий теплового потока и, в силу закона Фурье, к росту градиента температуры в зонах сопряженных тел, прилегающих к пятнам контакта (рис. 11.5, а). Образованный такими зонами слой с увеличенным градиентом температуры при расчете заменяют условной плоскостью контакта с фиктивным скачком температуры  $\Delta T_K$  на ней. Его получают экстраполяцией на контактный слой существующего в массивах сопрягаемых элементов

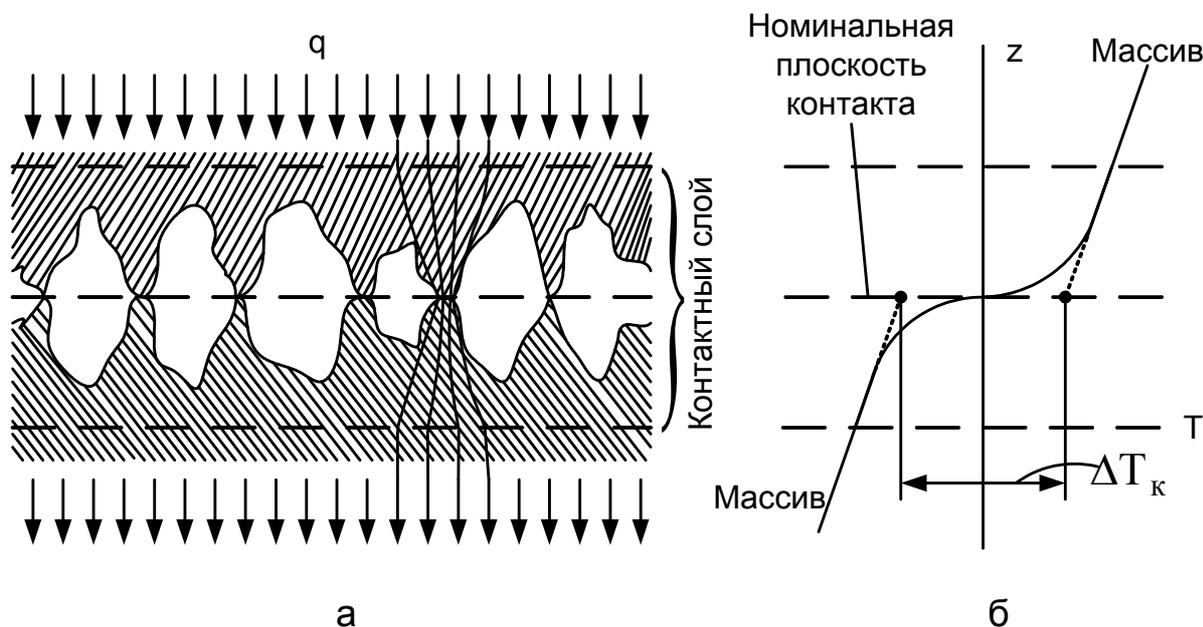


Рис. 11.5

распределения температуры вдоль теплового потока (рис. 11.5, б).

Тем самым реальному тепловому контакту ставят в соответствие удельное термическое сопротивление  $R_K = \Delta T_K / q$ , где  $q$  – плотность теплового потока в массиве.

Между контактирующими элементами теплота передается не только через пятна реального контакта (удельная проводимость «по металлу»  $\Lambda_M$ ), но и через среду, заполняющую зазоры между неровностями поверхностей (удельная проводимость «по среде»  $\Lambda_C$ ). Поскольку взаимное влияние  $\Lambda_M$  и  $\Lambda_C$  незначительно, удельное термическое сопротивление контакта принимают равным

$$R_K = 1/\Lambda_K = 1/(\Lambda_M + \Lambda_C). \quad (11.30)$$

Для вычисления  $\Lambda_M$  необходимо найти поле температуры в прилегающих к пятну контакта зонах сопряженных тел. При этом реальный контакт шероховатых поверхностей заменяют схематическим, состоящим из равномерно распределенных круглых пятен касания радиусом  $r_a$ , которые окружены эквивалентным зазором толщиной  $\delta_э$  (рис. 11.6, а). Это допустимо, так как размер пятна касания вполне оп-

ределен. Он равен  $r_a \approx 3,5 \cdot 10^{-5}$  м независимо от контактной нагрузки, микрогеометрии поверхности и свойств металла. Указанные факторы влияют лишь на число пятен и толщину зазора.

Постоянная среднестатистическая плотность распределения пятен контакта и большое расстояние между ними позволяют изолированно рассматривать одно пятно с соответствующей ему частью массива диаметром  $2a$  (рис. 11.6, б) как «кнопочный» контакт двух бесконечно длинных цилиндров (в силу малости  $r_a$  даже не очень толстый слой соответствует случаю  $z/r_a \gg 1$ ).

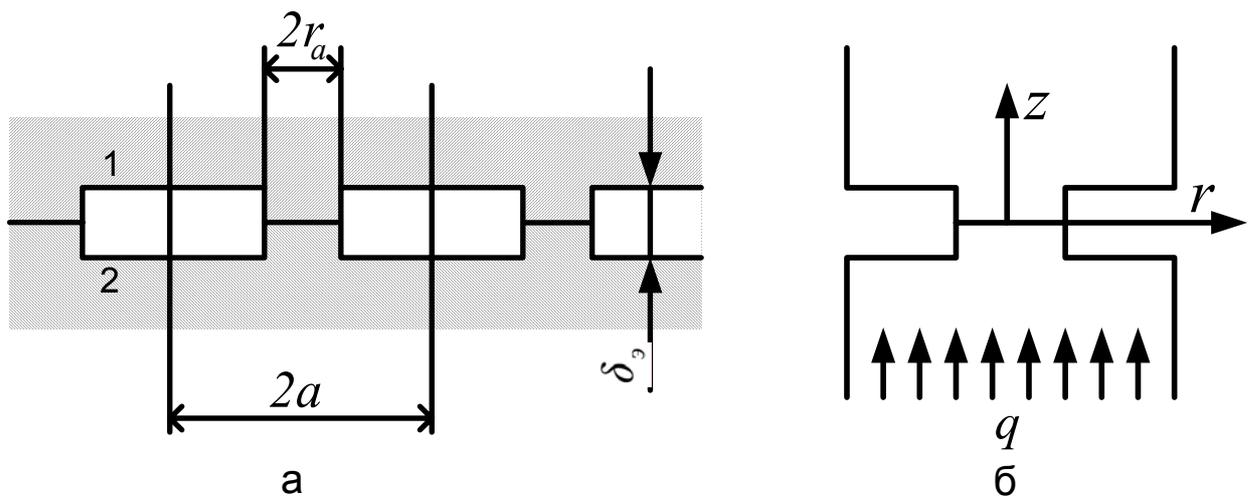


Рис. 11.6

Эта схема приводит к такой краевой задаче теплопроводности (для верхнего цилиндра):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (z > \delta_3 / 2);$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_a} = 0 \quad (0 < z < \delta_3 / 2);$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=\delta_3 / 2} = 0 \quad (r_a < r < a);$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = \text{const} \text{ либо } T_{z=0} = \text{const} \text{ при } 0 < r < r_a.$$

Третье граничное условие записано с учетом того, что при раздельном рассмотрении  $\Lambda_M$  и  $\Lambda_C$  расчет  $\Lambda_M$  ведут в предположении отсутствия теплового потока через зазор. Ввиду малого значения  $\delta_3$  можно заменить второе граничное условие первым, приняв для него  $z \geq 0$ , а в третьем условии взять  $z = 0$ .

Перейдем к безразмерному описанию задачи, отнеся  $T$  к  $qa/\lambda_M$  и  $z, r, r_a, a$  к  $a$ . При этом дифференциальное уравнение теплопроводности не изменится, а граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} (\partial T/\partial r)_{r=1} &= 0 \quad \text{при } z \geq 0; \\ (\partial T/\partial z)_{z=0} &= 0 \quad \text{при } r_a < r < 1; \\ (\partial T/\partial z)_{z=0} &= \text{const} \quad \text{либо } T_{z=0} = \text{const} \quad \text{при } 0 < r < r_a. \end{aligned}$$

Если взять третье граничное условие в виде  $T_{z=0} = 0$  (нулевое значение температуры можно использовать ввиду симметрии задачи) и учесть то обстоятельство, что при  $r = 0$  значение температуры конечно, то решение задачи приведет к зависимости

$$T(r, z) = -z - \epsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{\beta_n} J_0(\beta_n r) e^{-\beta_n z},$$

в которой  $J_0$  – функция Бесселя первого рода, нулевого порядка;  $\beta_n$  – характерные числа задачи, определяемые в соответствии с первым граничным условием как корни характеристического уравнения

$$J_1(\beta_n) - J'_0(\beta_n) = 0,$$

а  $\epsilon_0 \dots \epsilon_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) – постоянные интегрирования, определяемые из второго и третьего граничных условий.

Анализ выражения  $T(r, z)$  с учетом понятия  $\Delta T_K$  и значений  $z$  массива (здесь  $z \rightarrow \infty$ ) позволяет сделать следующий вывод: дополнительному перепаду температуры  $\Delta T_M$ , вызванному стягиванием линий теплового потока, соответствует второй член (первый дает линейное изменение температуры по  $z$ , отвечающее постоянной плотности теплового потока, а третий обращается в нуль при  $z \rightarrow \infty$ ). Поскольку принято  $T_{z=0} = 0$ , то записанное выражение  $T(z, r)$  дает превышение безразмерной температуры соответствующих точек верхнего цилиндра над температурой номинальной плоскости контакта.

Поэтому удельное термическое сопротивление, отвечающее сужению теплового «канала» к пятну реального контакта, равно

$$R_M = \frac{\Delta T_M}{q} = \frac{2\epsilon_0 a}{\lambda_M}$$

(здесь учтено, что безразмерная температура получена отнесением  $T$  к величине  $qa/\lambda_M$ ). Подставив значение  $\epsilon_0$ , имеем

$$R_M = \frac{\pi a^2}{2\lambda_M r_a} \left[ 1 - 1,41 \left( \frac{r_a}{a} \right) + 0,34 \left( \frac{r_a}{a} \right)^3 + 0,07 \left( \frac{r_a}{a} \right)^5 + \dots \right],$$

или

$$R_M = \frac{\pi r_a}{2\lambda_M \eta} \varphi(\eta), \quad (11.31)$$

где относительная площадь реального контакта  $\eta = r_a^2 / a^2$ , а коэффициент стягивания линий теплового потока:

$$\varphi(\eta) = 1 - 1,41\eta^{1/2} + 0,34\eta^{3/2} + 0,07\eta^{5/2}.$$

Полученное значение  $R_M$  не учитывает осложнения процесса контактного теплообмена из-за наличия поверхностных явлений (принято, что какие-либо пленки на поверхности отсутствуют, а физические свойства у поверхностного слоя и массива одинаковы). Величину  $\eta$  определяют по эмпирическим формулам как функцию контактного давления, модуля упругости материалов контактирующих тел и средних высот микронеровностей сопрягаемых поверхностей. Если материалы контактирующих тел различны, в  $R_M$  подставляют приведенный коэффициент теплопроводности

$$\bar{\lambda}_M = \frac{2\lambda_{M1}\lambda_{M2}}{\lambda_{M1} + \lambda_{M2}}.$$

Вторую составляющую удельного термического сопротивления контакта, отвечающую переходу теплоты через прослойки среды, обычно определяют по формуле

$$R_c = \delta_э / \lambda_c, \quad (11.32).$$

считая, что тепловой поток здесь передается только теплопроводностью при  $q_c = \text{const}$ . Эквивалентную толщину прослоек  $\delta_э$  находят по кривым опорных поверхностей или по упрощенным формулам вида

$$\delta_э = (R_{z1} + R_{z2})(1 - m),$$

где  $R_z$  – средние высоты микронеровностей сопрягаемых поверхностей;  $m$  – коэффициент заполнения профиля микронеровностей.

Отметим, что в случае, когда контактное давление  $p_K$  связано с перепадом температуры  $\Delta T_K$  (например, для контактирующих коаксиальных цилиндров, где величина  $p_K$  определяется реальным натя-

гом), для расчета  $R_M$  необходимо еще уравнение связи между  $p_K$  и  $\Delta T_K$ .

Очевидно, что удельное термическое сопротивление контакта уменьшается с ростом контактного давления (достаточно сильно при  $p_K < 5 \dots 10$  МПа) и улучшением чистоты обработки сопрягаемых поверхностей (особенно для грубой обработки). Характер изменения  $R_M$  при изменении средней температуры в зоне контакта определяется совокупностью зависимостей теплофизических и механических характеристик материалов контактных пар от температуры, поэтому он не является однозначным.

Эффективным средством уменьшения  $R_K$  является нанесение на контактирующие поверхности тонких (порядка высоты микронеровностей) покрытий из металлов и сплавов с большой теплопроводностью. Если нанесение покрытий затруднено, того же эффекта можно добиться введением между контактирующими телами прокладок из упомянутых материалов, заполнением межконтактного зазора высоко теплопроводными пастами.

## **Глава 12. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА**

### **12.1. Закон Ньютона – Рихмана**

#### **12.1.1. Исходные понятия и определения**

Опыт показывает, что в текучей среде существует, кроме теплопроводности, еще один «механизм» переноса тепловой энергии (теплоты). Он обусловлен перемещением макрообъемов жидкости или газа в пространстве с неоднородным полем температуры. Этот вид теплообмена называют *конвекцией*.

Ввиду молекулярного строения жидкостей и газов конвекции всегда сопутствует теплопроводность (см. подразд. 11.1.1). Совместный перенос теплоты в текучей среде посредством конвекции и теплопроводности именуют *конвективным теплообменом*.

Различают *вынужденную* и *естественную* (свободную) конвекцию. В первом случае пространственное перемещение текучей среды происходит за счет поверхностных сил, а именно, перепада давления, создаваемого внешним источником (насосом, компрессором). Например, вынужденной является конвекция при прокачке горючего по каналам охлаждения камеры жидкостного ракетного двигателя. Естественная конвекция возникает в результате действия поля массовых сил на текучую среду с неоднородным распределением плотности,

обусловленным переменностью температуры среды. Примером естественной конвекции может быть передача теплоты от батареи отопления к воздуху жилого помещения.

Соответственно упомянутым видам конвекции принято различать конвективный теплообмен при вынужденном и естественном движении текучей среды.

### 12.1.2. Основной закон конвективного теплообмена

Для инженерной практики наибольший интерес представляет конвективный теплообмен в области контакта текучей среды с твердым телом. В этом случае говорят о *теплоотдаче*; последняя подчиняется *закону Ньютона – Рихмана*:

$$q_n = \alpha(T_w - T_f). \quad (12.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  между *плотностью теплового потока*  $q_n$  (отнесена к поверхности твердого тела с внешней нормалью  $\vec{n}$ ) и *температурным напором*  $\Delta T_{wf} = T_w - T_f$  (разностью «опорных» температур поверхности  $T_w$  и текучей среды  $T_f$ ) называют *коэффициентом теплоотдачи*. Он характеризует интенсивность процесса теплоотдачи, представляя собой количество теплоты, прошедшей в единицу времени через единицу поверхности твердого тела при единичном температурном напоре.

Закон Ньютона – Рихмана можно переписать в виде  $q_n = \Delta T_{wf} / R_{\alpha_{уд}}$ , или  $\Delta T_{wf} = q_n R_{\alpha_{уд}}$ , где величину

$$R_{\alpha_{уд}} = 1/\alpha \quad (12.2)$$

рассматривают как удельное значение *термического сопротивления теплоотдачи* (см. подразд. 11.3.1). Для участка поверхности твердого тела площадью  $A$  имеем  $Q_A = \alpha(T_w - T_f)A$ , или  $\Delta T_{wf} = Q_A R_{\lambda A}$  (здесь термическое сопротивление теплоотдачи рассматриваемого участка  $R_{\alpha A} = 1/\alpha A$ ).

При использовании выражений (12.1) или (12.2) в инженерных расчетах предполагают, что опорные значения  $T_w$  и  $T_f$  известны. Поэтому основной задачей конвективного теплообмена как раздела науки о теплопереносе является нахождение коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ .

### 12.1.3. Методы определения коэффициента теплоотдачи

Этот коэффициент можно вычислить аналитически, решив *уравнение теплоотдачи*

$$\alpha = -\frac{\lambda_f}{T_w - T_f} \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (12.3)$$

полученное путем объединения закона Ньютона – Рихмана  $q_n = \alpha(T_w - T_f)$  и закона Фурье  $q_n = -\lambda_f (\partial T / \partial n)_{n=0}$  для «пристеночного» слоя текучей среды, где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к поверхности твердого тела (к «стенке»). Заметим, что использование здесь закона Фурье вполне правомерно, поскольку в непосредственной близости к стенке «поперечный» (по нормали к ней) перенос теплоты осуществляется только теплопроводностью текучей среды как при ламинарном, так и при турбулентном течении ее.

Однако использование соотношения (12.3) для поиска  $\alpha$  требует предварительного нахождения поля температуры  $T$  в текучей среде. Для этого необходимо решить краевую задачу конвективного теплообмена, основой которой является система дифференциальных уравнений гидрогазодинамики. Интегрирование этой системы (даже не осложненной конвективным теплообменом) крайне затруднительно, что вынуждает прибегать к серьезным упрощениям в постановке задач.

Для инженерной практики интерес представляют лишь некоторые решения задачи конвективного теплообмена между текучей средой и поверхностью твердого тела, полученные в приближении пограничного слоя. Таковым является, например, случай обтекания пластины.

Если обтекание пластины происходит в условиях теплоотдачи, то кроме понятия скоростного (*динамического*) пограничного слоя используют

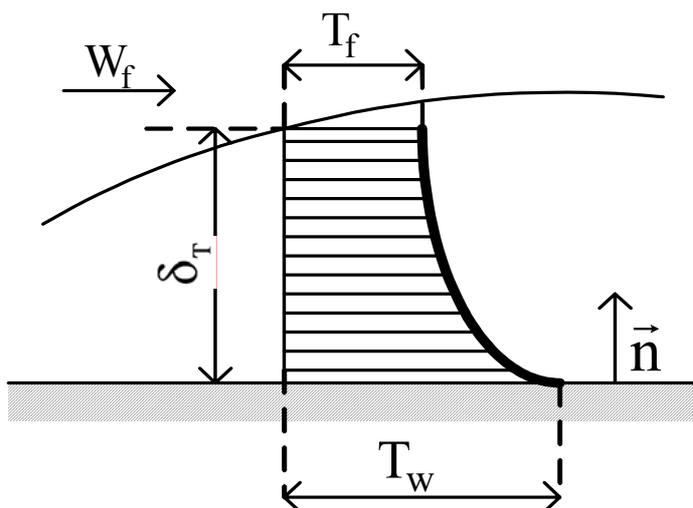


Рис. 12.1

аналогичное представление о *тепловом* погранслое. Последним называют непосредственно прилегающий к стенке слой текучей среды толщиной  $\delta_T$ , в котором температура изменяется от температуры стенки  $T_w$  до температуры основного потока  $T_f$  (рис. 12.1).

При наличии теплового пограничного слоя составляют (аналогично уравнению Кармана для динамического погранслоя) *интегральное соотношение энергии*. В простейшем случае обтекания плоской пла-

стины несжимаемой средой оно имеет вид

$$\frac{d\delta^{***}}{dx} = \frac{q_w}{\rho c_p W_f (T_f - T_w)},$$

где *толщина потери энергии*

$$\delta^{***} = \int_0^{\delta_T} \frac{W}{W_f} \left( 1 - \frac{T - T_w}{T_f - T_w} \right) dy.$$

Здесь индекс  $W$  отнесен к стенке; индексом  $f$  обозначены параметры текучей среды вне пределов погранслоя;  $T$  и  $W$  – температура и скорость в пограничном слое.

Решая интегральное соотношение энергии при заданном распределении температуры в погранслое (его обычно берут в виде степенного многочлена), получают выражение для толщины  $\delta_T$ . Это дает возможность найти зависимость для коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  с учетом уравнения (12.3) и принятого распределения температуры в пограничном слое.

Значение  $\alpha$  для несжимаемой среды можно найти и на основе решения уравнения импульсов, если найденные выражения для коэффициента трения  $C_f$  подставить в соотношение между  $C_f$  и  $\alpha$ . Последнюю получают, сопоставляя дифференциальные уравнения движения и энергии, а также сравнивая граничные условия для скорости и температуры.

Поскольку при аналитическом решении задач конвективного теплообмена приходится делать ряд допущений, полученные зависимости требуют экспериментальной проверки. Кроме того, само аналитическое рассмотрение возможно лишь для простейших случаев. Поэтому при изучении конвективного теплообмена большую роль играет эксперимент. Именно опытным путем получен основной массив данных по конвективному теплообмену.

К недостаткам экспериментального метода исследования относится то обстоятельство, что любой единичный опыт дает лишь одно значение искомой величины при заданном наборе аргументов. Тем не менее, результаты единичных опытов удается обобщить на все сходные случаи, используя теорию подобия и анализ размерностей. Такое обобщение позволяет получить зависимости коэффициента теплоотдачи от всех влияющих величин, не уступающие по информативности соответствующим аналитическим зависимостям.

## 12.2. Подобие и моделирование процессов конвективного теплообмена

### 12.2.1. Теория подобия в исследовании теплоотдачи

Согласно *теории подобия*, для обобщения результатов единичного опыта их надо представить в безразмерном виде как функциональную связь между искомым параметром и отношениями факторов, определяющих рассматриваемое явление. Такая связь одинакова у всех сходных явлений, если у них численно совпадают упомянутые отношения. В этом случае сопоставляемые явления называют подобными, а отношения факторов – *критериями (числами) подобия*.

Выражение критериев через *характерные значения* (масштабы) параметров процесса в теории подобия устанавливают, приводя к безразмерной форме соответствующее дифференциальное уравнение, поскольку именно его члены представляют собой факторы, существенные для процесса.

Применяя такую процедуру к уравнению движения, получают *критерии динамического подобия*. Из их числа для случая стационарной теплоотдачи к потоку несжимаемой среды определяющими являются критерии *Рейнольдса*  $Re$  и *Фруда*  $Fr$ .

Критерии теплового подобия найдем, приведя к безразмерной форме уравнения энергии и теплоотдачи. Выразив размерные параметры и операторы как произведения соответствующих безразмерных величин и масштабов, имеем

$$\frac{\rho_o c_o w_o T_o}{l_o} \overline{\rho c} \sum_{j=1}^3 \overline{w}_j \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}_j} = \frac{\lambda_o T_o}{l_o^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \overline{x}_j} \left[ \overline{\lambda} \left( \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}_j} \right) \right]$$

и

$$\alpha_o \overline{\alpha} = - \frac{\lambda_o}{l_o} \frac{\overline{\lambda}}{\overline{T}_w - \overline{T}_f} \left( \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{n}} \right)_{\overline{n}=0}$$

для уравнений энергии и теплоотдачи соответственно (первое из них записано для стационарного течения несжимаемой среды с пренебрежимо малым диссипативным тепловыделением). Здесь индексом «о» помечены масштабы, знаки «–» стоят над безразмерными параметрами. Разделив размерные множители (составлены из масштабов) каждого уравнения на один из них, получим

$$\overline{\rho c} \sum_{j=1}^3 \overline{w}_j \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}_j} = \frac{\lambda_o}{\rho_o c_o w_o l_o} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \overline{x}_j} \left[ \overline{\lambda} \left( \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}_j} \right) \right];$$

$$\frac{\alpha_0 l_0}{\lambda_0} \bar{\alpha} = - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{T}_w - \bar{T}_f} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} \right)_{\bar{n}=0}.$$

Теперь уравнения стали безразмерными. Каждое из них будет идентичным у двух сравниваемых случаев теплоотдачи, если для этих случаев численно совпадут безразмерные комплексы из масштабов. Следовательно, эти комплексы являются *критериями теплового подобия*. Выясним их физический смысл.

Критерий *Нуссельта*

$$\text{Nu} = \frac{\alpha_0 l_0}{\lambda_0} \quad (12.4)$$

является, по сути, искомой безразмерной величиной (безразмерным коэффициентом теплоотдачи). Его можно рассматривать как отношение удельных термических проводимостей теплоотдачи  $\alpha_0$  и теплопроводности  $\lambda_0/l_0$  текучей среды. Согласно смыслу коэффициента теплоотдачи, критерий Нуссельта выражает отношение интенсивностей конвективного теплопереноса и теплопроводности вблизи поверхности теплообмена. Случай  $\text{Nu} = 1$  означает, что процесс теплоотдачи осуществляется только теплопроводностью, поэтому критерий Нуссельта характеризует увеличение интенсивности теплообмена возле стенки за счет конвекции текучей среды. Поскольку в критерий Нуссельта входит искомая величина (коэффициент теплоотдачи), он является не определяющим, а *определяемым* критерием подобия.

Критерий *Пекле*

$$\text{Pe} = \frac{\rho_0 c_0 w_0 l_0}{\lambda_0} = \frac{w_0 l_0}{a_0} \quad (12.5)$$

представляет собой определяющий критерий теплового подобия. Как видно из уравнения энергии, он выражает отношение удельных термических проводимостей конвекции  $\rho_0 c_0 w_0$  и теплопроводности  $\lambda_0/l_0$  в потоке текучей среды. Следовательно, этот критерий является мерой относительной роли «молярного» и молекулярного переноса теплоты в потоке.

Заметим, что критерий Пекле можно представить в виде

$$\text{Pe} = \frac{w_0 l_0}{a_0} = \frac{w_0 l_0}{v_0} \frac{v_0}{a_0} = \text{Re Pr}, \quad (12.6)$$

где критерий *Прандтля*

$$\text{Pr} = \frac{v_0}{a_0} = \frac{\mu_0}{\rho_0} \cdot \frac{c_0 \rho_0}{\lambda_0} = \frac{\mu_0 c_0}{\lambda_0}. \quad (12.7)$$

целиком составлен из физических свойств среды и поэтому является безразмерной характеристикой их (иначе говоря, он безразмерно характеризует физические условия однозначности). С учетом того, что критерий Рейнольдса  $Re$  уже входит в систему критериев динамического подобия, которые для задач конвективного теплообмена являются определяющими, здесь вместо критерия Пекле обычно используют критерий Прандтля.

Вторым критерием динамического подобия, существенным для рассматриваемых задач, есть критерий Фруда, если под массовой силой понимать «подъемную» силу, вызванную нахождением в гравитационном поле текучей среды с неоднородным (из-за теплообмена) распределением плотности  $\rho$ . Напряженность этой силы на единицу объема составит  $g\Delta\rho = g(\rho_0 - \rho) = g\rho_0\beta\Delta T$ , где  $g$  – гравитационное ускорение,  $\beta$  – коэффициент объемного расширения,  $\Delta T$  – температурный напор. Здесь принято, что изменение плотности вследствие неизотермичности отвечает зависимости  $\rho = \rho_0(1 - \beta\Delta T)$ . Отнеся эту напряженность к объемной напряженности сил инерции  $\rho_0 w_0^2 / l_0$ , имеем  $Fr_{II} = w_0^2 / (g\beta\Delta T l_0)$ .

Использование критерия для подъемной силы в таком виде неудобно, поскольку здесь присутствует скорость движения среды, а наибольшую роль этот критерий играет в задачах естественной конвекции, когда указанная скорость не содержится в условиях однозначности. Для таких задач интенсивность и характер движения определяются отношением подъемной и вязкостной сил. Чтобы прийти к этому отношению, умножим  $1/Fr_{II}$  на  $Re^2$ :

$$\frac{g\beta\Delta T l_0}{w_0^2} \cdot \frac{w_0^2 l_0^2}{\nu_0^2} = \frac{g\beta\Delta T l_0^3}{\nu_0^2}.$$

Полученный безразмерный комплекс называют критерием *Грасгофа*:

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T l_0^3}{\nu_0^2}. \quad (12.8)$$

Если теплообмен происходит в условиях действия поля массовой силы, отличной от гравитационной, то в критерий Грасгофа вместо  $g$  подставляют напряженность результирующего поля массовых сил (суммарное ускорение).

С учетом изложенного, результаты экспериментального исследования стационарной теплоотдачи к несжимаемой текучей среде следует оформлять в виде *критериального уравнения*

$$Nu = f(Re, Gr, Pr, X_w, \dots), \quad (12.9)$$

где  $X_w$  – безразмерная координата поверхности теплообмена; символ ... означает, что в уравнения могут входить дополнительные «параметрические» критерии, безразмерно характеризующие геометрические и граничные условия однозначности (они имеют вид симплексов – отношений однотипных масштабов). Определяющие критерии  $Re, Gr, Pr$  представлены комплексами характерных величин (масштабов) процесса, значения которых также берут из условий однозначности. В отличие от них определяемый критерий  $Nu$  содержит еще искомую величину  $\alpha$ .

### 12.2.2. Анализ размерностей в исследовании теплоотдачи

Структуру критериев подобия можно также установить, опираясь на представления *анализа размерностей*. В основе его лежат три теоремы:

- всякое соотношение между размерными величинами можно привести к соотношению безразмерных величин;
- размерности производных величин имеют форму степенного многочлена размерностей основных величин;
- количество безразмерных комплексов, характеризующих процесс, равно разности количеств производных и основных величин, существенных для процесса.

Последняя теорема позволяет проверить правильность использования анализа размерностей для поиска критериев подобия. «Технология» же поиска состоит в переходе от размерных величин к безразмерным (этот переход допускает первая теорема) с применением второй теоремы. Предварительно следует установить полную систему величин, существенных для данного явления.

Выполним упомянутый переход для стационарного случая вынужденной конвекции жидкости в трубе. Понятно, что коэффициент теплоотдачи зависит от обстоятельств течения (они определены характерными размером  $D_0$  и скоростью  $W_0$ ), а также от свойств жидкости (ее плотности  $\rho_0$ , вязкости  $\mu_0$ , теплопроводности  $\lambda_0$ , теплоемкости  $c_0$ ). Характерные значения, или масштабы, величин (помечены индексом «0») указаны в условиях однозначности. Согласно второй теореме анализа размерностей, имеем

$$[\alpha] = [D_0]^a [w_0]^b [\rho_0]^c [\mu_0]^d [\lambda_0]^e [c_0]^f.$$

Выразим размерности всех параметров через размерности основных величин (длины, времени, массы, температуры), обозначив их  $L, t, M, T$  соответственно. Вспоминая, что  $[\alpha] = \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,  $[\mu] = \text{Па} \cdot \text{с}$ ,  $[\lambda] = \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $[c] = \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , причем  $\text{Вт} = \text{Дж}/\text{с}$ ,

Па = Н/м<sup>2</sup>, Дж = Н·м, Н = кг·м/с<sup>2</sup>, получаем

$$\frac{M}{t^3 T} = L^a \left(\frac{L}{t}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \left(\frac{M}{Lt}\right)^d \left(\frac{ML}{t^3 T}\right)^e \left(\frac{L^2}{t^2 T}\right)^f.$$

Поскольку размерности правой и левой частей этого выражения должны совпадать, значения показателей степеней в обеих частях у  $L$ ,  $t$ ,  $M$ ,  $T$  должны быть одинаковы. Приравнявая упомянутые показатели, получаем систему алгебраических уравнений:

- для  $L$ :  $0 = a + b - 3c - d + e + 2f$ ,
- для  $t$ :  $-3 = -b - d - 3e - 2f$ ,
- для  $M$ :  $1 = c + d + e$ ;
- для  $T$ :  $-1 = -e - f$ .

Она содержит 6 неизвестных, поэтому два показателя степени следует задать. Принимая за таковые степени  $c$  и  $f$ , выражаем через них остальные показатели:  $e = 1 - f$ ;  $d = f - c$ ;  $b = c$ ;  $a = c - 1$ .

Подставив полученные показатели в исходное выражение, имеем

$$[\alpha] = \frac{[D_o]^c}{[D_o]} [w_o]^c [\rho_o]^c \frac{[\mu_o]^f}{[\mu_o]^c} \frac{[\lambda_o]}{[\lambda_o]^f} [c_o]^f.$$

Обобщая полученную степенную зависимость между размерностями на сами величины, запишем:

$$\alpha = A \frac{D_o^c}{D_o} w_o^c \rho_o^c \frac{\mu_o^f}{\mu_o^c} \frac{\lambda_o}{\lambda_o^f} c_o^f,$$

где  $A$  – числовой множитель. Объединив величины с одинаковыми показателями степени, получим

$$\frac{\alpha D_o}{\lambda_o} = A \left(\frac{\rho_o w_o D_o}{\mu_o}\right)^c \left(\frac{\mu_o c_o}{\lambda_o}\right)^f. \quad (12.10)$$

Проверка показывает, что здесь все комплексы параметров являются безразмерными. Сравнивая их с выражениями (12.5) – (12.7), видим, что эти комплексы представляют собой критерии Нуссельта, Рейнольдса и Прандтля соответственно. Сама же зависимость (12.10) есть, согласно (12.9), основой критериального уравнения теплоотдачи при вынужденной конвекции жидкости в трубе.

Как видно, анализ размерностей позволил установить вид определяющих критериев подобия ( $Re$ ,  $Pr$ ) и безразмерного коэффициента теплоотдачи (определяемого критерия  $Nu$ ). Этот анализ выявил также структуру критериального уравнения теплоотдачи (имеет вид степенного одночлена). Значения множителя  $A$  и показателей степе-

ни  $c$ ,  $f$  в этом уравнении не определены – их устанавливают посредством эксперимента. Те значения  $A$ ,  $c$ ,  $f$ , которые найдены в единичном опыте с некоторым диапазоном изменения определяющих и параметрических критериев, справедливы для всех сходных случаев вынужденной конвекции, подобных исследованному (то есть имеющих значения указанных критериев, попадающие в упомянутый диапазон).

Аналогичная процедура для стационарной естественной конвекции приводит к уравнению

$$\text{Nu} = B \text{Gr}^{m_1} \text{Pr}^{m_2}, \quad (12.11)$$

где  $\text{Gr}$  – число Грасгофа согласно (12.8). Здесь учтено, что при естественной конвекции обстоятельства течения определяются характерным линейным размером  $L_0$  (например, высотой вертикальной стенки) и комплексом  $g\beta\Delta T$ , входящим в формулу подъемной силы.

Сопоставление выражений (12.10) и (12.11) позволяет утверждать, что в тех случаях стационарной вынужденной конвекции, когда существенный вклад вносит конвекция естественная, основой критериального уравнения теплоотдачи является выражение

$$\text{Nu} = C \text{Re}^{n_1} \text{Gr}^{n_2} \text{Pr}^{n_3}, \quad (12.12)$$

где числовой множитель  $C$  и показатели степени  $n_i$  находят опытным путем.

В уравнения (12.11) и (12.12) могут также входить параметрические критерии, отражающие влияние геометрических и граничных условий однозначности.

### 12.2.3. Моделирование процессов теплоотдачи

Кроме обобщения результатов единичного опыта, теория подобия и анализ размерностей позволяют еще осуществлять экспериментальное исследование процессов конвективного теплообмена не в натуральных условиях, а на *физической модели* с последующим перенесением результатов опыта на условия природы.

Упомянутая модель представляет собой геометрически подобный натурному объект удобных размеров, в котором опытное изучение конвективного теплообмена ведут с (возможно) иными, чем в природе, текучей средой и материалом стенки, отличным от природы уровнем температуры, замененным «источником нагрева». Например, исследование теплоотдачи при охлаждении камеры ЖРД больших размеров можно вести на уменьшенной копии камеры, выполненной из дешевого металла по упрощенной технологии, с нетоксичной текучей средой и при сниженной температуре стенки, нагрев которой осуществляют не за счет реакции горения компонентов топлива в камере, а посредством электроподогревателей. Тем самым достигаются суще-

ственная экономия средств и улучшение условий проведения опыта.

Понятно, что результаты *модельного эксперимента* могут быть перенесены в условия природы только в случае подобия натурального и смоделированного процессов. Согласно подразд. 12.2.1 и 12.2.2, для этого требуется геометрическое подобие природы и модели, численное равенство параметрических критериев, отражающих граничные условия однозначности, а также такой диапазон изменения существенных для процесса параметров, при котором получаемые в модельном опыте значения определяющих критериев подобия были бы равны величинам соответствующих критериев, имеющимся в натуральных условиях.

Выполнить требование подобия геометрии и граничных условий, а также равенства критериев Рейнольдса и Грасгофа у модели и природы ( $Re_M = Re_H$ ;  $Gr_M = Gr_H$ ) не так уж трудно. Сложнее обстоит дело с условием  $Pr_M = Pr_H$ . Оно серьезно ограничивает возможность замены текучей среды: у капельных жидкостей число Прандтля составляет от нескольких единиц до сотен, а у газов – от 0,67 до 1. Замену рабочей среды затрудняет также зависимость физических свойств ее от температуры. Согласно теории подобия, упомянутая зависимость, представленная в безразмерном виде, должна быть одинакова у исходной и взятой сред. Однако такое совпадение наблюдается лишь в пределах некоторых групп сред в определенных интервалах температуры.

#### 12.2.4. Обработка результатов опыта в критериях подобия

Согласно подразд. 12.2.1 и 12.2.2, результаты экспериментального исследования процессов теплоотдачи выражают критериальными уравнениями вида (12.12), дополненными, в случае необходимости, параметрическими критериями, учитывающими геометрию и граничные условия. Численный множитель  $C$  и показатели степеней  $n_i$  находят методами математической статистики с применением ЭВМ. В простых случаях возможна «ручная» обработка результатов опыта с нанесением их в логарифмических координатах.

При обработке результатов опыта учитывают «устоявшиеся» рекомендации по учету воздействия некоторых граничных условий. Так, влияние величины термической нагрузки и направления теплового потока (нагрев или охлаждение текучей среды) чаще всего учитывают поправкой  $(Pr_f / Pr_w)^{0,25}$ , справедливой, по Михееву, как для капельных жидкостей, так и для газов. Здесь индексы «f» и «w» означают, что свойства рабочей среды при вычислении чисел Прандтля  $Pr_f$  и  $Pr_w$  берут при характерных температурах  $T_f$  и  $T_w$ .

Подчеркнем еще раз, что критериальное уравнение, полученное

обработкой результатов единичного опыта, справедливо только в тех диапазонах изменения определяющих и параметрических критериев подобия, которые имели место в ходе проведения опыта. Использование критериального уравнения возможно лишь при граничных условиях того же типа (чаще всего  $q = \text{const}$  или  $T = \text{const}$ ) и выборе характерных параметров одного вида. Например, при исследовании теплоотдачи в трубах за характерный линейный размер  $l_0$  могут быть приняты диаметр или длина трубы, а в качестве характерной температуры  $T_f$  взята температура среды на входе или ее средняя температура вдоль трубы. Важно также проследить, по какому коэффициенту теплоотдачи определено число Нуссельта.

*Локальный коэффициент теплоотдачи*  $\alpha = q/\Delta T_{wf}$  вычисляют по текущим значениям плотности теплового потока  $q$  и температурного напора  $\Delta T_{wf}$ , находя последний как  $\Delta T_{wf} = T_{w,x} - \bar{T}_{f,x}$ , где  $T_{w,x}$  – местная температура стенки;  $\bar{T}_{f,x}$  – среднemasсовая температура текучей среды в рассматриваемом сечении. Для труб ее определяют по энтальпии потока среды в сечении  $\bar{i}_x = \int_{A_{сеч}} \rho w i dA / \int_{A_{сеч}} \rho w dA$ . Если известно распределение теплового потока  $q$  по длине трубы, можно использовать выражение  $\bar{T}_{f,x} = \bar{T}_{f,вх} \pm \int_0^x (q\Pi/c_p \dot{m}) dx$ , где  $\Pi$  – периметр сечения трубы,  $\dot{m}$  – массовый расход жидкости или газа.

*Средний коэффициент теплоотдачи*  $\bar{\alpha} = Q/(A_{пов} \overline{\Delta T_{wf}})$  вычисляют по общему тепловому потоку  $Q$  на поверхности теплообмена  $A_{пов}$  и среднему температурному напору  $\overline{\Delta T_{wf}}$ , в качестве которого могут быть взяты следующие значения:

среднеинтегральное  $\overline{\Delta T_{и}} = \frac{1}{l_0} \int_0^l (T_{w,x} - \bar{T}_{f,x}) dx;$

среднелогарифмическое  $\overline{\Delta T_{л}} = \frac{|\Delta T_1| - |\Delta T_2|}{\ln|\Delta T_1/\Delta T_2|};$

среднеарифметические  $\overline{\Delta T_{a}} = (|\Delta T_1| + |\Delta T_2|)/2.$

Здесь  $\Delta T_1$  и  $\Delta T_2$  – больший и меньший из температурных напоров

на входе и выходе:  $\Delta T_{\text{ВХ}} = (T_{\text{W}} - \bar{T}_{\text{f}})_{\text{ВХ}}$ ;  $\Delta T_{\text{ВЫХ}} = (T_{\text{W}} - \bar{T}_{\text{f}})_{\text{ВЫХ}}$ .

Если известны локальные значения  $\alpha$ , то средний коэффициент теплоотдачи находят интегрированием:  $\bar{\alpha} = (1/A_{\text{ПОВ}}) \int \alpha dA$ , или

$$\bar{\alpha} = (1/l) \int_0^l \alpha dx \text{ для труб и пластин.}$$

Отметим в заключение, что сокращение числа аргументов при использовании обобщенных переменных (критериев подобия) вместо исходных параметров не только облегчает обработку результатов опыта, но и упрощает само проведение эксперимента.

Действительно, при «обычном» проведении опыта необходимо найти зависимость искомой величины (коэффициента теплоотдачи) от всех влияющих параметров. Для этого следует выполнить соответствующее число серий опытов, причем в каждой серии должны оставаться неизменными все параметры, кроме одного. При исследовании теплоотдачи это требование не всегда выполнимо. Например, если параметр  $\mu$  изменять за счет изменения температуры, то значения параметров  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $c$  не могут быть сохранены. Большие трудности возникают и при последующем подборе эмпирической зависимости, отражающей влияние всех параметров, если число их велико.

При использовании методов теории подобия и анализа размерностей находят зависимость искомой величины не от всех влияющих параметров, а только от некоторых их комплексов (критериев подобия), число которых всегда меньше числа параметров. Например, для развитой вынужденной конвекции (см. подразд. 12.2.2) имеем два определяющих критерия вместо шести исходных влияющих параметров. Тем самым существенно сокращается число серий опытов. Кроме того, при использовании критериев подобия снимается требование сохранения в данной серии опытов значений всех аргументов, за исключением изменяемого целенаправленно. Например, варьирование числа Прандтля посредством изменения температуры повлечет за собой изменение числа Рейнольдса вследствие зависимости  $\mu = \mu(T)$ . Однако это не приведет к трудностям поиска функциональной связи чисел  $Nu$ ,  $Re$ ,  $Pr$ .

### 12.3. Модели типичных процессов конвекции в однофазной среде

#### 12.3.1. Естественная конвекция

Различают естественную конвекцию текучей среды в большом объеме и в ограниченном пространстве. В первом случае основой

критериального уравнения теплоотдачи является выражение (12.11), в котором постоянные  $B$  и  $m_i$  есть функции положения теплообменной поверхности относительно вектора результирующего ускорения и режима движения среды (ламинарного, переходного или турбулентного). В качестве характерного значения  $T$  здесь берут температуру  $T_f$  среды вдали от стенки или среднеарифметическую температуру пограничного слоя  $(T_w + T_f)/2$ ; характерным линейным размером является «высота» теплообменной поверхности, отсчитываемая в направлении вектора результирующего ускорения. Особенностью критериального уравнения является равенство значений  $m_1$  и  $m_2$ .

Например, результаты многочисленных исследований теплоотдачи при естественной конвекции у вертикальной стенки обобщены зависимостью

$$\overline{Nu}_\Pi = B(Gr_\Pi Pr_\Pi)^m, \quad (12.13)$$

где индекс «п» означает, что роль характерной величины играет упомянутая выше температура пограничного слоя  $T_\Pi = (T_w + T_f)/2$ . Значения  $B$  и  $m$  зависят от величины произведения  $Gr Pr$ . Так, если  $10^{-3} < Gr_\Pi Pr_\Pi < 5 \cdot 10^2$ , то влияние свободной конвекции невелико и теплоотдача определяется, главным образом, теплопроводностью (при этом  $m = 1/8$ ,  $B = 1,18$ ). В случае  $5 \cdot 10^2 < Gr_\Pi Pr_\Pi < 2 \cdot 10^7$  имеем  $m = 1/4$ ,  $B = 0,54$ ; здесь наблюдается развитая ламинарная конвекция. При  $2 \cdot 10^7 < Gr_\Pi Pr_\Pi < 10^{13}$  режим течения в погранслое переходный и турбулентный, тогда  $m = 1/3$ ,  $B = 0,135$ . Во всех исследованиях, обобщенных уравнением (12.13), число Прандтля  $Pr_\Pi \geq 0,7$ .

Упомянутое уравнение применимо и для горизонтальных труб, а также для шаров (здесь характерным размером служит диаметр). Допустимо использовать (12.13) и в случае горизонтально расположенных плоских поверхностей, если за характерный размер принять меньшую длину поверхности. Однако здесь коэффициент теплоотдачи следует увеличить по сравнению с (12.13) на 30 %, когда возле поверхности возможна развитая естественная конвекция, и уменьшить на 30 %, когда такое движение затруднено. Например, при  $T_w > T_f$  первому случаю отвечает расположение среды над горизонтальной поверхностью теплообмена, второму – под ней.

Теплообмен в результате естественной конвекции в ограниченном пространстве принято схематизировать передачей теплоты от горячей стенки к холодной через разделяющий их зазор, заполненный те-

кучей средой. Такой теплообмен зависит от вида зазора (различают вертикальные, горизонтальные, цилиндрические, сферические зазоры) и взаимного расположения горячей и холодной стенок (в случае зазоров последних трех типов). Его описывают критериальными уравнениями вида (12.11), в которые для вертикальных зазоров вводят поправку  $(h/\delta)^n$ , где  $h$  и  $\delta$  – высота и толщина зазора.

В инженерной практике допустимо использование единой для всех зазоров расчетной зависимости, основанной на формуле теплопроводности:

$$q = \frac{\lambda_{\text{ЭКВ}}}{\delta} (T_{w_1} - T_{w_2}). \quad (12.14)$$

Здесь  $\lambda_{\text{ЭКВ}} = \varepsilon_K \lambda$  – эквивалентный коэффициент теплопроводности в зазоре, учитывающий влияние естественной конвекции на теплообмен  $q$  между стенками, имеющими температуру  $T_{w_1}$  и  $T_{w_2}$  ( $\lambda$  – истинный коэффициент теплопроводности среды). Поправку  $\varepsilon_K$  представляют функцией

$$\varepsilon_K = B(\text{Gr}_f \text{Pr}_f)^m, \quad (12.15)$$

где  $B = 0,105$  и  $m = 1/3$  при  $10^3 < \text{Gr}_f \text{Pr}_f < 10^6$ ;  $B = 0,4$  и  $n = 1/5$  при  $10^6 < \text{Gr}_f \text{Pr}_f < 10^{10}$ . Если  $\text{Gr}_f \text{Pr}_f < 10^3$ , влиянием естественной конвекции пренебрегают ( $\varepsilon_K = 1$ ). Индекс «f» означает, что при нахождении критериев Грасгофа и Прандтля в качестве характерной принята средняя температура среды в зазоре, условно вычисляемая как  $T_f = (T_{w_1} + T_{w_2})/2$ . Характерным линейным размером здесь служит толщина зазора  $\delta$ .

### 12.3.2. Вынужденное продольное обтекание плоской пластины

Гидравлический аспект этого обтекания и структуру динамического пограничного слоя рассматривают в гидрогазодинамике (погранслоем включает участки ламинарного, переходного и турбулентного течений). Такая структура является обычной для погранслоя, хотя в некоторых случаях (высокая степень турбулентности набегающего потока, острая кромка пластин) пограничный слой может быть турбулентным по всей длине.

Если температура пластины  $T_w$  отличается от температуры потока  $T_f$ , то параллельно с динамическим формируется тепловой погранслоем, определение которого дано в подразд. 12.1.3. Там же ска-

зано, что в случае продольно обтекаемой пластины значения коэффициента теплоотдачи можно найти аналитически, решая интегральные соотношения импульсов или энергии.

Для ламинарного пограничного слоя оба решения при  $Pr \geq 1$  и условии  $T_w = \text{const}$  приводят к уравнению в критериях подобия, достаточно близкому к более общей зависимости

$$\overline{Nu}_{fl} = 0,66 Re_{fl}^{0,5} Pr_f^{0,43} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}, \quad (12.16)$$

полученной экспериментально (в случае условия  $q_w = \text{const}$  числовой множитель заменяют на 0,5). Во всех числах подобия свойства среды взяты при температуре внешнего потока  $T_f$ ; характерным линейным размером является длина пластины  $l$ .

Аналогичные решения для турбулентного погранслоя также дают результаты, хорошо согласующиеся с опытным уравнением

$$\overline{Nu}_{fl} = 0,037 Re_{fl}^{0,8} Pr_f^{0,43} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (12.17)$$

Как видно, показатель степени у числа Рейнольдса здесь значительно выше, чем в соотношении (12.16). Это обстоятельство отражает существенную интенсификацию теплоотдачи при турбулентном режиме течения вследствие активного «поперечного перемешивания» объемов текучей среды. Такая турбулентная интенсификация наблюдается не только при вынужденном обтекании пластины; она характерна для всех случаев конвективного теплообмена.

Критериальные уравнения (12.16) и (12.17) составлены для средних по длине пластины чисел Нуссельта  $\overline{Nu}_{fl} = \overline{\alpha} l / \lambda_f$ . Локальный коэффициент теплоотдачи  $\alpha_x$  изменяется вдоль пластины: он постепенно падает вследствие увеличения толщины пограничного слоя (кроме переходной области, где наблюдается рост  $\alpha_x$  из-за возникновения турбулентности в погранслое). Формулы для расчета  $Nu_{fx}$  имеются в специальной литературе.

### 12.3.3. Теплообмен при течении в трубах

В гидрогазодинамике это течение подразделяют на динамически стабилизированную область (развитое течение) и начальный (входной) участок.

Аналогично поступают при рассмотрении теплоотдачи: зону формирования теплового погранслоя называют *термическим начальным* (входным) участком, а область после сечения, где тепловые погранслои сомкнулись, считают зоной *стабилизированного теплообмена*. Упомянутые области показаны на рис. 12.2, а и б для случаев охлаждения ( $T_{f_{\text{BX}}} > T_w$ ) и подогрева ( $T_{f_{\text{BX}}} < T_w$ ) текучей среды в трубе. Как видно, на термическом входном участке, кроме теплового пограничного слоя, существует «термическое ядро» потока с постоянным по сечению значением температуры  $T_f$ ; в стабилизированной области температура среды изменяется по всему сечению (оно полностью занято тепловым погранслоем).

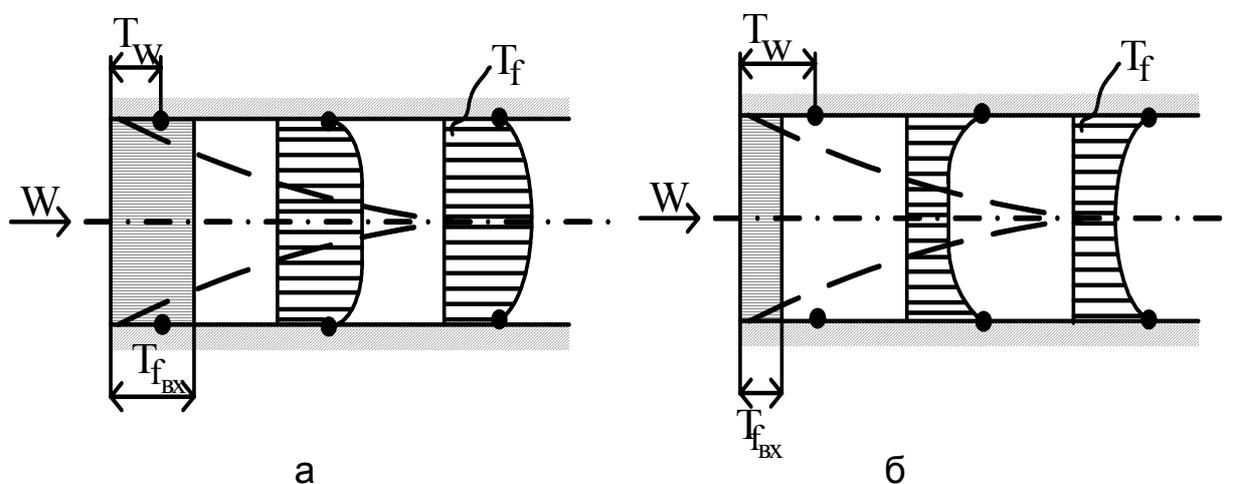


Рис. 12.2

Длину динамического начального участка  $l_H$  всегда отсчитывают от входа в трубу, термического  $l_{HT}$  – от сечения, с которого начинается теплообмен (последнее не обязательно совпадает со входом). Ориентировочно можно принять, что при ламинарном режиме  $l_{HT} \approx l_H Pr$ , а при турбулентном – термический начальный участок занимает 10...15 диаметров трубы.

Изменение интенсивности теплообмена по длине термического начального участка трубы сходно с тем, какое наблюдают при вынужденном обтекании пластины. По мере увеличения толщины погранслоя локальный коэффициент теплоотдачи  $\alpha_x$  падает монотонно, если течение ламинарно, и с зоной подъема в области перехода ламинарного динамического погранслоя в турбулентный. В зоне стабилизированного теплообмена величина  $\alpha_x$  постоянна.

Значения локального коэффициента теплоотдачи  $\alpha_x$  могут быть вычислены по аналитическим зависимостям, полученным для лами-

нарного и турбулентного режимов течения. В специальной литературе приведены решения как в случае размещения термического начального участка в зоне динамически стабилизированного потока, так и при условии одновременного развития динамического и теплового пограничных слоев. Эти решения при  $X \rightarrow \infty$  позволяют найти коэффициент теплоотдачи на участке стабилизированного теплообмена.

В инженерной практике чаще оперируют с критериальными уравнениями для среднего по длине трубы коэффициента теплоотдачи  $\overline{\alpha}$ , которые получены обобщением экспериментальных данных. Наиболее известны уравнения Михеева:

$$\overline{Nu}_{fd} = 0,15 Re_{fd}^{0,33} Pr_f^{0,33} (Gr_{fd} Pr_f)^{0,1} \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \overline{\varepsilon}_l; \quad (12.18)$$

$$\overline{Nu}_{fd} = 0,021 Re_{fd}^{0,8} Pr_f^{0,43} \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \overline{\varepsilon}_l. \quad (12.19)$$

Первое из них получено для ламинарного течения, второе – для турбулентного. Здесь характерными величинами процесса являются диаметр  $d$  трубы, расходная скорость течения и среднemasсовая температура  $T_f$  текучей среды. Поправка на длину трубы  $\overline{\varepsilon}_l > 1$  учитывает влияние на  $\overline{\alpha}$  повышенных величин  $\alpha_x$  на термическом начальном участке, которое наблюдается при относительных длинах  $l/d < 50$ ; значения  $\overline{\varepsilon}_l$  берут из справочников.

В уравнении (12.18) присутствует критерий  $Gr_{fd}$ , учитывающий влияние свободной конвекции на теплообмен (при ламинарном режиме это влияние заметно). Например, вынужденное течение текучей среды вниз по трубе с  $T_w > T_f$  сопровождается возникающим возле стенки восходящим свободно-конвективным движением, которое «турбулизует» пристеночный слой, вследствие чего теплоотдача возрастает. В уравнение (12.19) критерий Грасгофа не включен, так как при турбулентном течении перемешивание текучей среды столь интенсивно, что естественная конвекция практически не сказывается на теплоотдаче.

Уравнения (12.18) и (12.19) можно применять и для расчета теплообмена в трубах с некруговым поперечным сечением. В этих случаях вместо  $d$  подставляют эквивалентный гидравлический диаметр  $d_T = 4A/\Pi$ , где  $A$  – площадь поперечного сечения с периметром  $\Pi$ .

#### 12.3.4. Теплоотдача поперечно обтекаемых труб

Вязкость среды и неравномерное вдоль «обвода» сечения распределение давления обуславливает весьма сложную картину поперечного обтекания труб. Из-за вязкости на «лобовой» части поверхности трубы возникает динамический погранслой, толщина которого нарастает по обводу сечения, начиная от передней критической точки. При больших числах Рейнольдса ламинарный погранслой переходит в турбулентный. С неравномерным распределением давления связан отрыв пограничного слоя в «кормовой» зоне течения, где во внешнем потоке существует положительный градиент давления. Этот отрыв сопровождается образованием крупномасштабных вихрей и носит периодический характер.

Положение точки отрыва зависит от величины градиента давления и вида пограничного слоя (турбулентный погранслой устойчивее к отрыву). Опыт показывает, что в случае обтекания труб с круговым поперечным сечением ламинарный погранслой (формируется при  $Re_{fd} < 2 \cdot 10^5$ ) отрывается еще в «лобовой» зоне течения ( $\varphi \approx 80$  град при отсчете угла от передней критической точки). Отрыву турбулентного погранслоя, существующего при  $Re_{fd} = (2 \dots 5) \cdot 10^5$ , соответствует угол  $\varphi \approx 120$  град.

Такой характер обтекания приводит к существенной неравномерности распределения локальных коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_\varphi$  вдоль обвода сечения. Ввиду нарастания толщины пограничного слоя значение  $\alpha_\varphi$  падает вдоль обвода, начиная от передней критической точки. В месте перехода ламинарного погранслоя в турбулентный величина  $\alpha_\varphi$  резко возрастает, а в дальнейшем вновь начинает падать. Второй подъем локального коэффициента теплоотдачи соответствует зоне отрыва пограничного слоя.

Для той части обвода кругового цилиндра, где погранслоем примыкает к поверхности, имеются аналитические зависимости для  $\alpha_\varphi$ , полученные на основе теории пограничного слоя.

В инженерных расчетах обычно используют критериальные уравнения для среднего по обводу значения коэффициента теплоотдачи  $\bar{\alpha}$ , найденные обобщением результатов опыта. Например, Жукаускас рекомендует такие зависимости:

$$\bar{Nu}_{fd} = 0,5 Re_{fd}^{0,5} Pr_f^{0,38} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}; \quad (12.20)$$

$$\bar{Nu}_{fd} = 0,25 Re_{fd}^{0,6} Pr_f^{0,43} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (12.21)$$

Первая из них справедлива при  $Re_{fd} = 5...1000$ , вторая – при  $10^3 < Re_{fd} < 2 \cdot 10^5$ . Здесь в числах подобия характерными являются диаметр  $d$  трубы, температура  $T_f$  и скорость  $W_f$  «набегающего» потока.

Если угол  $\psi$  между  $W_f$  и осью трубы отличается от 90 град, то в уравнения вводят поправку  $\varepsilon_\psi < 1$ ; в диапазоне  $\psi = 90...30$  град  $\varepsilon_\psi \approx 1 - 0,54 \cos^2 \psi$ .

На практике чаще имеют дело с конвективным теплообменом не единичного цилиндра, а системы («пучка») труб с коридорным и шахматным размещением («упаковкой»). В такой системе теплоотдача труб первого ряда близка к рассмотренной выше, ибо на него набегает равномерный поток. Второй и последующие ряды обтекаются средой, «возмущенной» предшествующими трубами, поэтому теплообмен здесь интенсивнее. Опыт показывает, что начиная с третьего ряда теплоотдача стабилизируется: значения  $\bar{\alpha}$  для всех рядов далее примерно одинаковы.

Средний по обводу трубы коэффициент теплоотдачи  $\bar{\alpha}$  вычисляют по уравнениям вида (12.20) – (12.21) с поправками:  $\varepsilon_\psi$  – на угол натекания,  $\varepsilon_t$  – на относительный шаг  $t/d$ ,  $\varepsilon_i$  – на номер ряда в пучке. Значения числового множителя и показателя степени у критерия Рейнольдса зависят не только от режима течения, но и от вида упаковки (коридорной или шахматной).

### 12.3.5. Теплообмен при большой скорости движения газа

Как известно, большая скорость  $W$  движения текучей среды приводит к проявлению ее сжимаемости. Степень этого проявления тем больше, чем выше значение критерия Маха  $M = W/a$  (здесь  $a$  – скорость звука).

В сжимаемых средах возможно взаимопреобразование кинетической и внутренней энергий, поэтому существенное проявление сжимаемости сказывается на конвективном теплообмене между потоком газа и поверхностью твердого тела. Действительно, торможение газа в пограничном слое, сопровождающееся переходом кинетической энергии во внутреннюю (тепловую), приводит к увеличению температуры газа в погранслое.

Степень этого «кинетического подогрева» оценивают по температуре газа непосредственно возле стенки при условии, что последняя теплоизолирована. Такую *температуру восстановления*, или «адиабатную температуру стенки», вычисляют по формуле

$$T_r = T_f \left( 1 + r \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad (12.22)$$

где  $T_f$  – температура газа вне погранслоя (в основном потоке);  $r$  – коэффициент восстановления ( $r < 1$ ), приближенно равный  $r = Pr_f^{0,5}$  и  $r = Pr_f^{0,33}$  при ламинарном и турбулентном течениях соответственно. В случае больших чисел Маха температура газа вблизи стенки сильно отличается от  $T_f$ . Например, при турбулентном течении воздуха с  $T_f = 288$  К и  $M = 6$  температура восстановления равна  $T_r = 2133$  К.

Кинетический нагрев газа в погранслое ведет к изменению его свойств, что сказывается на величине коэффициента теплоотдачи. Более того, значительное увеличение температуры пограничного слоя может «обратить» направление теплового потока. В самом деле, если значение  $T_r$  у потока с  $T_f < T_w$  превысит  $T_w$ , поток будет не охлаждать, а нагревать стенку.

Поэтому при расчете конвективного теплообмена между поверхностью твердого тела и высокоскоростным потоком газа вносят изменения не только в зависимости для коэффициента теплоотдачи, но и в закон Ньютона – Рихмана. Его следует записать в виде

$$q_n = \alpha(T_w - T_r), \quad (12.23)$$

поскольку теплообмен определяется разностью температуры стенки  $T_w$  и температуры слоя газа, непосредственно прилегающего к стенке, а эта температура здесь равна  $T_r$ .

Что касается зависимостей для расчета коэффициентов теплоотдачи, то в них естественно ввести дополнительные критерии подобия – Маха  $M$  и Пуассона  $Po \equiv k$ , где  $k$  – показатель изоэнтропы. Именно они характеризуют проявление сжимаемости, которое и является причиной повышения температуры газа в погранслое, ведущего к изменению его свойств.

Примером таких зависимостей может служить критериальное уравнение локальной теплоотдачи пластины, обтекаемой высокоскоростным потоком газа:

$$Nu_{wx} = 0,029 Re_{wx}^{0,8} Pr_w^{0,4} \left( \frac{T_w}{T_r} \right)^{0,39} \left( 1 + r \frac{k-1}{2} M_f^2 \right)^{0,11}. \quad (12.24)$$

Характерными величинами здесь являются температура стенки  $T_w$  и координата  $X$ , отсчитываемая от входной кромки. Уравнение обоб-

щает результаты опытов при значениях  $Re_{\text{вх}} = 5 \cdot 10^5 \dots 2 \cdot 10^7$  (турбулентный погранслой), числах Маха  $M_f = 1,7 \dots 4$ , величине температурного фактора  $(T_w/T_r) = 0,55 \dots 0,95$ .

Существует и другой подход к учету изменения свойств газа в пограничном слое при большой скорости движения. Согласно Эккерту, значения коэффициента теплоотдачи можно вычислять по обычным критериальным уравнениям (представлены в предыдущих подразделах), если свойства газа брать при «эффективной» температуре

$$T_3 = 0,5(T_w + T_f) + 0,22(T_r - T_f). \quad (12.25)$$

Этот подход также учитывает влияние «критериев сжимаемости»  $M$  и  $k$ , поскольку в  $T_3$  входит температура восстановления  $T_r$ . Он дает удовлетворительные результаты в достаточно широком диапазоне чисел Маха, особенно если вычислять коэффициент восстановления в  $T_r$  по зависимостям  $r = Pr_3^{0,5}$  и  $r = Pr_3^{0,33}$ , то есть определять  $T_3$  методом последовательных приближений.

Однако метод эффективной температуры не учитывает явлений, которые возникают в случае диссоциации газа ( $M > 10$ ) и тем более его ионизации ( $M > 25$ ). Расчету теплоотдачи в этих условиях посвящена специальная литература.

## 12.4. Модели процессов теплообмена при фазовых переходах

### 12.4.1. Теплоотдача при кипении в большом объеме

*Кипением* называют процесс интенсивного парообразования в капельной жидкости, для которого характерно периодическое возникновение в ней новых поверхностей раздела фаз. Чтобы этот процесс реализовался, необходим определенный *перегрев* жидкости  $\Delta T_{\text{фн}} = T_f - T_H$  над *температурой насыщения*  $T_H$ .

Такой перегрев можно обеспечить в любой точке жидкости, температура  $T_f$  которой близка к  $T_H$  для имеющегося давления, если резко «сбросить» последнее. В результате жидкость вскипает по всему объему. Это «объемное кипение» мы не рассматриваем.

Дальнейшее изложение касается *кипения на поверхности нагрева*, обусловленного подводом к ней теплового потока  $q$ . Здесь существенно перегревается лишь слой жидкости, непосредственно прилегающий к твердой поверхности. Этот перегрев можно характеризовать *температурным напором*  $\Delta T_{\text{вн}} = T_w - T_H$ , где  $T_w$  – температура поверхности нагрева (стенки). Именно от величины его зависят

интенсивность парообразования и вид поверхностей раздела фаз.

При малом значении  $Q$  упомянутый перегрев не может обеспечить фазового перехода, так что теплота передается к жидкости естественной конвекцией (см. подразд. 12.3.1). По достижении требуемого для кипения перегрева в пристеночном слое жидкости начинают образовываться поверхности раздела фаз. Вначале они имеют сферический вид: в случае смачивающей жидкости во впадинах микрошероховатости стенки возникают пузырьки пара, которые растут в результате испарения в них жидкости. Когда радиус пузырька становится равным

$$R_o = 0,01 \theta \sqrt{\sigma / [(\rho' - \rho'')g]},$$

пузырек отрывается от поверхности нагрева и всплывает под действием подъемной силы  $(\rho' - \rho'')g$ . Здесь  $\theta$  – краевой угол смачивания в градусах;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения;  $\rho'$  и  $\rho''$  – плотности жидкости и пара на линии насыщения;  $g$  – гравитационное ускорение.

Пузырьки «зарождаются» лишь во впадинах, размеры которых достаточны для размещения в них сферы с «критическим радиусом»

$$R_k = 2 \sigma T_H / [r \rho'' (T_w - T_H)],$$

характеризующим минимально возможный объем пузырька в момент зарождения (здесь  $r$  – удельная теплота парообразования). Как видно,  $R_k$  тем меньше, чем больше температурный напор  $\Delta T_{WH}$ , который пропорционален плотности  $Q$  теплового потока на стенке. Поэтому с ростом  $Q$  все больше впадин микрошероховатости становятся «центрами парообразования», и количество пузырьков пара увеличивается. Соответственно усиливается «перемешивание» пристеночного слоя жидкости пузырьками, обусловленное их ростом и отрывом.

По мнению большинства исследователей, именно это перемешивание обеспечивает очень высокие значения коэффициентов теплоотдачи  $\alpha$  при таком *пузырьковом кипении* вследствие отвода от стенки теплоты перегрева  $c' \Delta T_{WH}$  хорошо «турбулизованной» жидкостью ( $c'$  – удельная теплоемкость ее на линии насыщения). Далее теплота расходуется на испарение жидкости в пузырек в процессе его роста на стенке и последующего всплытия. Интенсивность теплообмена при кипении тем выше, чем больше число центров парообразования и частота отрыва пузырьков.

Однако увеличение количества действующих центров парообразования приводит также к тому, что соседние пузырьки становятся все ближе. В конце концов они «сливаются», образуя сплошную паровую пленку на поверхности нагрева. При этом последняя оказывается отделившейся от жидкости, вследствие чего коэффициент теплоотдачи резко падает: теплота передается к жидкости через слой пара с малой теплопроводностью. Непосредственный контакт жидкости со стенкой возможен только в момент периодических «прорывов» пленки (в виде крупных объемов пара) в толщу жидкости. Такой режим кипения называют *пленочным*; в силу малых значений  $\alpha$  его стараются избегать, когда процесс кипения организуют с целью передачи теплоты от поверхности нагрева к жидкости. Переход от пузырькового кипения к пленочному называют *кризисом кипения*.

Изложенное иллюстрирует типичная «кривая кипения» (рис. 12.3), характеризующая зависимость коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  от температурного напора  $\Delta T_{\text{вн}}$ . Область А отвечает режиму свободной конвекции, В и С – пузырькового и пленочного кипения соответственно.

Для воды при атмосферном давлении первая область ограничена температурным напором  $\Delta T_{\text{вн}} = 5\text{К}$  (или

$q = 5,8 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$ ); кризис кипения наступает при

$\Delta T_{\text{вн}} = 25\text{К}$  ( $q = 8,3 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$ ), здесь достигается максимальное значение коэффициента теплоотдачи  $\alpha = 3 \cdot 10^4 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ .

Наличие кривых кипения конкретных жидкостей позволяет получать простые зависимости для расчета коэффициентов теплоотдачи. Так, в случае воды участку кривой кипения, соответствующему развитому пузырьковому кипению, отвечает степенная зависимость

$$\alpha = 3,14q^{0,7} p^{0,15}, \quad (12.26)$$

где давление  $p = 1 \dots 40$  бар.

Обобщенные связи коэффициента теплоотдачи и определяющих факторов ищут, используя критерии подобия. Последние устанавливают для пузырькового кипения, анализируя систему соответствующих уравнений.

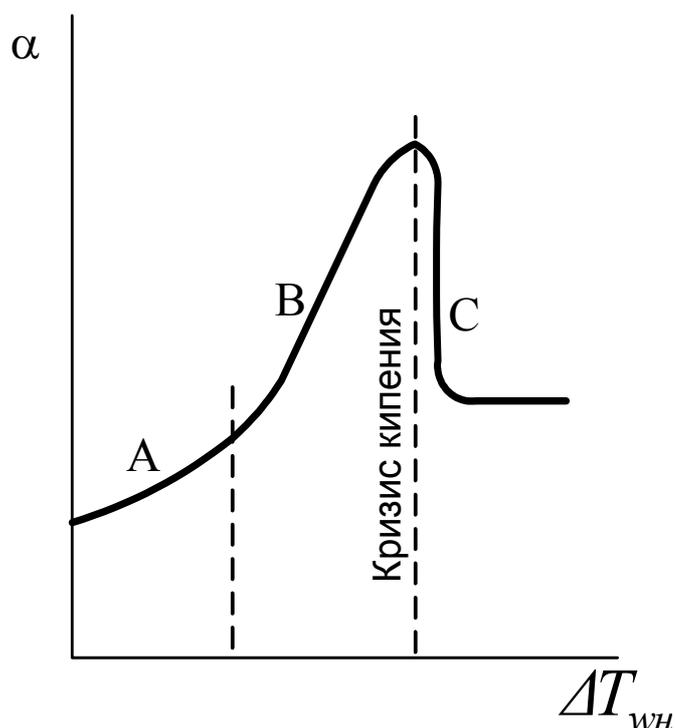


Рис. 12.3

Например, придерживаясь изложенных выше представлений о «механизме» процесса кипения, Кружилин проанализировал систему уравнений конвективного теплообмена в жидкой фазе, а также уравнения движения парового пузырька, уравнение теплообмена на его поверхности и уравнения, характеризующие число действующих центров парообразования. Анализ показал, что определяющими безразмерными аргументами здесь являются критерий Якоба

$$Ja = \frac{c' \Delta T_{\text{WH}}}{r} \cdot \frac{\rho'}{\rho''}, \quad (12.27)$$

критерий Прандтля для жидкости  $Pr_H$  и отношение двух характерных радиусов пузырька  $R_K/R_O$ . Критерий Якоба (объемное число фазового перехода) представляет собой энтальпию перегрева единицы объема жидкости, отнесенную к объемной теплоте парообразования. В последующем этот критерий и отношение  $R_K/R_O$  преобразованы в два других безразмерных комплекса, один из которых характеризует число действующих центров парообразования, а другой – частоту отрыва пузырьков.

Лабунцов обобщил обширный массив опытных данных по пузырьковому кипению в большом объеме критериальным уравнением обычной структуры:

$$Nu_* = B Re_*^n Pr_H^{0,33}. \quad (12.28)$$

Здесь число Нуссельта  $Nu_* = \alpha l_* / \lambda'$  и критерий Рейнольдса  $Re_* = \rho'' W_{\text{кип}} l_* / \mu'$  построены по характерному линейному размеру  $l_* = 0,5 R_K Ja$ ; критерий Прандтля  $Pr_H$  вычислен по теплофизическим свойствам жидкости  $\mu', c', \lambda'$  на линии насыщения. Турбулизация жидкости при кипении определяется интенсивностью парообразования, поэтому модифицированный критерий Рейнольдса  $Re_*$  включает приведенную «скорость кипения» (скорость отвода пара)  $W_{\text{кип}} = q / (r \rho'')$ , которая представляет собой количество  $M^3$  пара, образующегося в секунду на  $M^2$  поверхности нагрева. Уравнение (12.28) справедливо для диапазона  $Re_* = 10^{-5} \dots 10^4$ ,  $Pr_H = 0,86 \dots 7,6$ ; в нем  $B = 0,0625$  и  $n = 0,5$  при  $Re_* < 0,01$ , а в случае  $Re_* > 0,01$  следует брать  $B = 0,125$  и  $n = 0,65$ .

Плотность теплового потока  $q_{\text{кр}}$ , при которой наступает кризис кипения, находят по формуле Кутателадзе:

$$q_{кр} = (0,13...0,16) r \sqrt{\rho''} \sqrt[4]{\sigma g (\rho' - \rho'')}. \quad (12.29)$$

Изложенных выше представлений о механизме кипения придерживается большинство исследователей. Существуют и другие содержательные модели процесса кипения; их можно найти в специальной литературе.

#### 12.4.2. Кипение при движении жидкости в трубах

Особенностью рассматриваемого случая является повышение температуры жидкости  $T_f$  по мере продвижения ее вдоль обогреваемой трубы. В силу этого по длине трубы имеют место различные режимы теплоотдачи.

На входном (*экономайзерном*) участке  $T_f < T_H$ , и теплообмен подчиняется закономерностям вынужденной конвекции в трубах (см. подразд. 12.3.3). По достижении в пристеночном слое жидкости перегрева  $T_f - T_H$ , необходимого для кипения, здесь начинается образование паровых пузырьков (участок *поверхностного кипения*). Двухфазная зона потока постепенно увеличивается, пока не заполнит все сечение трубы (развитое пузырьковое кипение, или *эмульсионный режим*). Последующее увеличение перегрева приводит к образованию больших пузырей, поперечный размер которых близок к диаметру трубы (*пробковый режим кипения*). Когда такие пузыри-пробки «сливаются», центральная часть сечения трубы оказывается полностью занятой паром, а жидкость располагается на стенке сравнительно тонким слоем. Такой режим движения двухфазного потока называют *стержневым* (по пару), или *кольцевым* (по жидкости). Кипение кольцевого слоя жидкости сопровождается выбросом капель в поток пара и постепенным «оголением» стенки. В итоге все сечение трубы занимает паровой поток с находящимися в нем каплями жидкости. Этот влажный пар далее превращается в сухой и затем – в перегретый.

Все сказанное касается вертикальных труб. В случае горизонтального расположения наблюдается нарушение осевой симметрии структуры двухфазного потока. В частности, на режимах пробковом и стержневом жидкая и паровая фазы «расслаиваются» так, что паровая часть потока занимает верхнюю зону сечения трубы.

Максимальные значения коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  при кипении жидкости в трубах соответствуют стержневому режиму, когда термическое сопротивление создает лишь тонкий сильно турбулизированный слой жидкости на стенке. Однако этот режим чреват возможным оголением стенки, что влечет за собой резкое уменьшение  $\alpha$  и рост температуры поверхности обогрева. Поэтому устройства с кипением жидкости в трубах обычно проектируют в расчете на реализацию эмульсионного и пробкового режимов.

Для них коэффициенты теплоотдачи чаще всего вычисляют по интерполяционной формуле Лабунцова:

$$\alpha/\alpha_w = (4\alpha_w + \alpha_q)/(5\alpha_w - \alpha_q). \quad (12.30)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\alpha_w$ ,  $\alpha_q$  – коэффициенты теплоотдачи соответственно: при кипении движущейся жидкости ( $\alpha$ ), при вынужденной конвекции однофазной жидкости ( $\alpha_w$ ), при развитом пузырьковом кипении в большом объеме ( $\alpha_q$ ). Эту формулу используют при  $\alpha_q/\alpha_w = 0,5...2$ ; в случае  $\alpha_q/\alpha_w < 0,5$  теплоотдача полностью соответствует вынужденной конвекции ( $\alpha = \alpha_w$ ), а при  $\alpha_q/\alpha_w > 2$  интенсивность теплообмена определяется только кипением ( $\alpha = \alpha_q$ ). Формула (12.30) составлена для потоков с паросодержанием  $\beta \leq 0,7$  ( $\beta$  представляет собой отношение объемных расходов пара и парожидкостной смеси).

### 12.4.3. Теплоотдача при конденсации пара

В теплотехнических устройствах конденсация пара, то есть превращение его в жидкость, чаще всего происходит при соприкосновении пара со стенкой, температура которой  $T_w$  ниже температуры на-

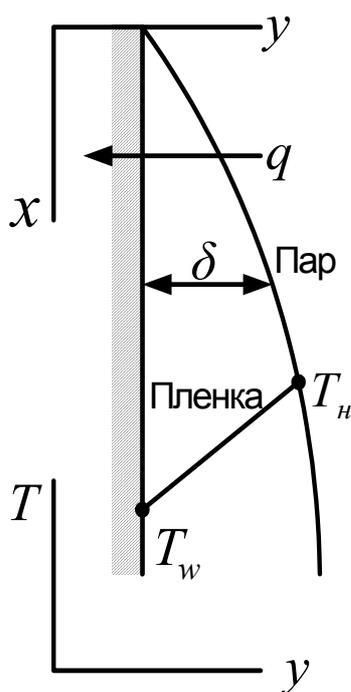


Рис. 12.4

сыщения  $T_n$ . Обычно имеют дело с *пленочной конденсацией*, когда образующаяся жидкость стекает по стенке в виде пленки с постепенно увеличивающейся толщиной  $\delta$  (рис. 12.4).

Фазовому переходу соответствует скачок температуры  $\Delta T_{фП}$ , который в большинстве случаев пренебрежимо мал ( $\sim 0,03$  К для водяного пара при атмосферном давлении). Поэтому температуру поверхности пленки считают равной  $T_n$ , что при линейном распределении температуры позволяет выразить тепловой поток от пара к стенке формулой (11.13):  $q = (T_n - T_w)\lambda/\delta$ . Здесь  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности конденсата,

$\delta$  – толщина пленки (считаем, что перенос теплоты осуществляется только теплопроводностью при  $\lambda = \text{const}$ ). В то же время по закону Ньютона – Рихмана  $q = \alpha(T_H - T_W)$ . Сравнение записанных выражений дает  $\alpha = \lambda/\delta$ . Следовательно, для вычисления коэффициента теплоотдачи при пленочной конденсации необходимо знать толщину пленки.

Теоретическую зависимость для  $\delta$  пленки, ламинарно стекающей по вертикальной стенке, впервые получил Нуссельт из условия равенства сил трения и тяжести (силы инерции и поверхностного напряжения, а также взаимодействие пленки с паром Нуссельт не учитывал). Его решение приводит к следующей формуле для среднего по высоте стенки  $h$  коэффициента теплоотдачи:

$$\bar{\alpha} = 0,943 \left[ \frac{\rho^2 g \lambda^3 r}{\mu(T_H - T_W)h} \right]^{0,25}. \quad (12.31)$$

Здесь  $g$  – гравитационное ускорение,  $\rho$  и  $\mu$  – плотность и динамический коэффициент вязкости конденсата,  $r$  – теплота фазового перехода; все теплофизические свойства конденсата приняты неизменными по толщине пленки.

Формуле (12.31) эквивалентно критериальное уравнение

$$\overline{Nu}_h = 0,943 (Ga_h Pr Ku)^{0,25}, \quad (12.32)$$

где число Нуссельта  $\overline{Nu}_h = \bar{\alpha}h/\lambda$  определено по высоте стенки  $h$ , критерий Галилея  $Ga_h = \rho^2 gh^3/\mu^2$  характеризует отношение массовой силы к силе вязкости, критерий Прандтля вычислен по свойствам конденсата ( $Pr = \mu c/\lambda$ ), а критерий Кутателадзе  $Ku = r/c\Delta T_{WH}$  представляет собой массовое число фазового перехода, найденное по температурному напору  $\Delta T_{WH} = T_W - T_H$ . Значения  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $c$  целесообразно брать при температуре  $(T_W + T_H)/2$ .

Если заметить, что число Рейнольдса  $Re_\delta = \rho W\delta/\mu$  в рассмотренном случае напрямую выражается через коэффициент теплоотдачи  $\bar{\alpha}$ , то уравнение (12.32) можно переписать в виде

$$Re_\delta = 0,943 Ga_h^{0,25} (Pr Ku)^{-0,75}. \quad (12.33)$$

Действительно, массовый расход конденсата на единицу ширины пленки  $\dot{m} = \rho W\delta$  в сечении  $x = h$  определяется количеством

сконденсированного пара:  $\dot{m} = \bar{\alpha} \Delta T_{\text{WH}} h / r$ . Поэтому имеем  $Re_{\delta} = \bar{\alpha} \Delta T_{\text{WH}} h / (r \mu) = \overline{Nu} / (Pr Ku)$ .

Более поздние решения учитывали наличие силы инерции и конвективный перенос теплоты в пленке. Сравнение их с формулой Нуссельта (12.31) подтверждает ее справедливость при  $Ku > 5$ ,  $Pr < 100$ . Если значения критериев подобия не отвечают этому диапазону, в формулу вводят поправки на влияние упомянутых факторов.

При больших температурных напорах следует учесть зависимость теплофизических свойств конденсата от температуры. Это можно сделать, введя в формулы (12.31) – (12.33) множители Михеева  $(Pr_{\text{H}} / Pr_{\text{W}})^{0,25}$  или Лабунцова  $(\lambda_{\text{W}} / \lambda_{\text{H}})^{3/8} (\mu_{\text{H}} / \mu_{\text{W}})^{1/8}$ .

Приведенные выше уравнения соответствуют строго ламинарному течению, которое сохраняется лишь в случае весьма малых чисел Рейнольдса. Уже при  $Re_{\delta} \approx 3 \dots 8$  на поверхности пленки начинают появляться волны. Наложение их на ламинарную пленку изменяет интенсивность теплообмена. Для учета этого обстоятельства Лабунцов рекомендует поправочный множитель  $\varepsilon_{\text{B}} = Re_{\delta}^{0,04}$ .

Волновое течение переходит в турбулентное при  $100 < Re_{\delta} < 400$ . Если число Рейнольдса больше указанных значений, на последовательно расположенных участках пленки наблюдаются ламинарный, волновой и турбулентный режимы течения. Для такого общего случая средний коэффициент теплоотдачи вычисляют по критериальному уравнению:

$$Re_{\delta\text{H}} = \left\{ 89 + 0,024 Pr_{\text{H}}^{0,5} (Pr_{\text{H}} / Pr_{\text{W}})^{0,25} \times \right. \\ \left. \times \left[ Ga_{\text{HH}}^{1/3} (Pr_{\text{H}} Ku_{\text{H}})^{-1} - 2300 \right] \right\}^{4/3}. \quad (12.34)$$

Индекс «н» означает, что теплофизические свойства конденсата взяты при температуре насыщения  $T_{\text{H}}$ .

Приведенные соотношения пригодны и для расчета пленочной конденсации неподвижного пара на внешней поверхности горизонтальной трубы, если в критериях  $Ga$ ,  $Nu$ ,  $Re_{\delta}$  заменить высоту стенки  $h$  на диаметр трубы  $d$ .

Более сложные случаи конденсации (наличие движения пара вне и внутри труб, ослабленная гравитация, конденсация из парогазовой смеси, капельная конденсация и др.) рассмотрены в специальной литературе.

## Глава 13. МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ

### 13.1. Закон Стефана – Больцмана

#### 13.1.1. Исходные понятия и определения

*Теплоперенос излучением* (радиация) включает: преобразование внутренней энергии вещества в энергию излучения, перенос ее в пространстве посредством электромагнитных волн (дискретными «порциями» – фотонами) и поглощение этой энергии веществом с превращением во внутреннюю энергию.

При решении практических задач лучистого теплообмена не рассматривают детали взаимопреобразования внутренней энергии и энергии электромагнитного поля, равно как и вопросы переноса энергии этим полем. Здесь тепловое излучение описывают (по аналогии с геометрической оптикой) системой тепловых лучей, распространяющихся во всех направлениях прямолинейно в сплошной среде, свойства которой характеризуют коэффициентами излучения и поглощения (они являются функциями состояния). Такой метод применим, когда характерный линейный размер задачи много больше длины волны излучения  $\lambda$ , а время процесса значительно превышает период колебания всех частот, содержащихся в излучении. В большинстве инженерных задач это требование выполняется.

Твердые и жидкие тела, как правило, непрозрачны для тепловых лучей; они излучают и поглощают в очень тонком слое, непосредственно примыкающем к поверхности. Поэтому процесс здесь рассматривают как поверхностный и все его характеристики относят к единице площади поверхности.

Газы, особенно трех- и многоатомные, излучают и поглощают тепловые лучи во всем своем объеме, так что количественные характеристики процесса в этом случае относят к единице объема.

Различают интегральное и спектральное излучение. *Интегральным* называют излучение во всем диапазоне длин волн, *спектральным* – излучение в узком интервале от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ .

*Поверхностной плотностью потока* интегрального излучения  $E$ , Вт/м<sup>2</sup>, называют полное количество лучистой энергии, излучаемой в полусферу единицей площади поверхности в единицу времени:  $E = dQ/dF$ . Та же величина для спектрального излучения соответствует единичному интервалу длин волн:  $E_\lambda = dE/d\lambda$ .

Очевидно, что полный поток теплового излучения  $Q = \int_F E dF$ , а ве-

личину  $E$  можно определить как  $E = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda$  (пределы интегрирования могут быть изменены на диапазон длин волн  $0,8 \cdot 10^{-3} \dots 0,8$  м, соответствующий тепловым лучам).

Энергия теплового излучения, падающего на твердое или жидкое тело, может поглощаться, отражаться или пропускаться телом:  $E_{\text{пад}} = E_{\text{погл}} + E_{\text{отр}} + E_{\text{проп}}$ . Отношения соответствующих количеств энергии к падающей энергии называют *поглощательной*  $A$ , *отражательной*  $R$  и *пропускательной*  $D$  способностями тела.

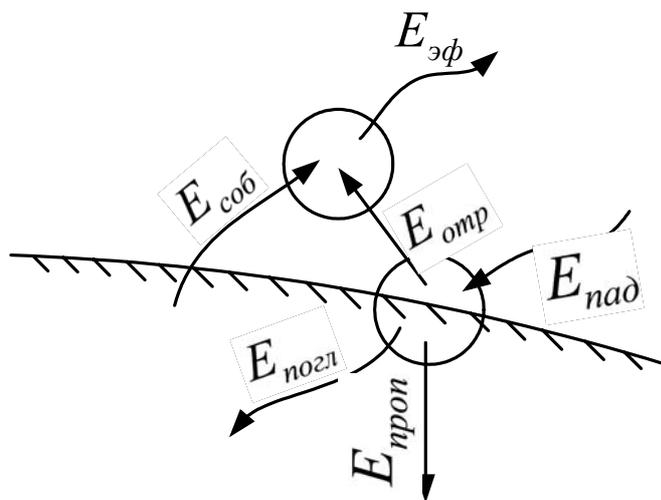


Рис. 13.1

Очевидно, что  $A + R + D = 1$ . Тело с  $A = 1$  именуют абсолютно черным, с  $R = 1$  – абсолютно белым, с  $D = 1$  – абсолютно прозрачным.

Для нечерных тел существует понятие *эффективного излучения*, являющегося суммой собственного и отраженного излучений (рис. 13.1):  $E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}} + E_{\text{отр}}$ .

В случае газовых тел вводят соответствующие объемные характеристики излучения.

Так, *объемной плотностью потока* излучения называют количество лучистой энергии, испускаемой единицей объема среды в единицу времени по всем направлениям в пределах сферы:  $\eta = dQ/dV$ ,  $\eta_{\lambda} = dQ_{\lambda}/dV$ . Роль величин  $A$  и  $R$  здесь играют коэффициенты поглощения и рассеивания:  $\alpha = \eta_{\text{погл}}/\eta_{\text{пад}}$ ,  $\beta = \eta_{\text{рас}}/\eta_{\text{пад}}$ ; их сумму называют коэффициентом ослабления  $k$ .

Важное значение в теории радиационного теплообмена играет понятие *абсолютно черного тела* ( $A = 1$ ), законы излучения которого лежат в основе всех расчетов лучистого теплообмена. Излучение реальных тел обычно выражают через излучение абсолютно черного тела. Так, вводят интегральные и спектральные *степени черноты*  $\varepsilon = E/E_0$ ,  $\varepsilon_{\lambda} = E_{\lambda}/E_{\lambda_0}$  (здесь и далее индексом «о» помечены характеристики абсолютно черного тела).

Степень черноты зависит от природы тела, состояния его поверхности, температуры. Поглощательная и отражательная способности твердых тел зависят также от распределения падающего излучения по длинам волн.

### 13.1.2. Основной закон лучистого теплообмена

Таковым является закон *Стефана – Больцмана*, связывающий поверхностную плотность потока интегрального излучения абсолютно черного тела с его температурой:

$$E_0 = \sigma_0 T^4, \quad (13.1)$$

где  $\sigma_0 = 5,6687 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – коэффициент излучения абсолютно черного тела (постоянная Стефана – Больцмана). С использованием этого закона построено большинство инженерных методик расчета лучистого теплообмена.

Излучение абсолютно черного тела характеризуется непрерывным спектром с максимумом, положение которого по длинам волн определяет закон *Вина*:  $\lambda_{(\max)} T = 2,896 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ . Излучение реальных тел всегда меньше по спектральной интенсивности, чем излучение абсолютно черного тела, при тех же значениях  $\lambda$  и  $T$ . Многие тела излучают тепловую энергию в небольших интервалах длин волн, имея прерывистый спектр (особенно это относится к газам при умеренных температурах).

Выполняя практические расчеты, излучение и поглощение реальных тел приближенно рассматривают как соответствующие характеристики «серого тела». Таковым называют тело, спектр излучения которого непрерывен и подобен спектру абсолютно черного тела при той же температуре, а спектральная степень черноты  $\varepsilon_\lambda$  постоянна во всем диапазоне длин волн и не зависит от температуры (так что  $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$ ).

Закон Стефана – Больцмана применим к серым телам с поправкой на степень черноты  $\varepsilon$ :

$$E = \varepsilon \sigma_0 T^4 = \sigma T^4, \quad (13.2)$$

где  $\sigma = \varepsilon \sigma_0$  – коэффициент излучения серого тела.

Еще один важный закон лучистого теплообмена установлен Кирхгофом. Согласно ему, при равновесном излучении отношение величин  $E$  и  $A$  любого тела равно плотности потока излучения абсолют-

но черного тела при той же температуре:  $E/A = E_0$ ,  $E_\lambda/A_\lambda = E_{\lambda_0}$ . Поскольку  $E/E_0 = \varepsilon$ ,  $E_\lambda/E_{\lambda_0} = \varepsilon_\lambda$ , закон Кирхгофа можно записать в виде

$$\varepsilon = A; \varepsilon_\lambda = A_\lambda, \quad (13.3)$$

то есть при равновесном излучении степень черноты тела равна поглощательной способности.

### 13.2. Лучистый теплообмен между поверхностями твердых тел

При расчете такого теплообмена обычно используют концепцию серых тел, разделенных абсолютно прозрачной (диатермичной) средой. Учитывают также, что каждое из тел «посылает» другому не только собственное излучение согласно (13.2), но и отраженную часть попавшего на рассматриваемое тело потока теплоты, излученного другим телом (то есть тела «обмениваются» эффективным излучением).

Разность этих эффективных излучений  $E_{\text{эф}}$  каждого из тел и определяет величину итогового теплопереноса между телами:

$$q_{1 \rightarrow 2} = E_{\text{эф}1} - E_{\text{эф}2}. \quad (13.4)$$

С учетом соотношений  $Q = qF$ ,  $E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}} + E_{\text{отр}}$ ,  $E_{\text{соб}} = \varepsilon \sigma_0 T^4$ ,  $E_{\text{отр}} = E_{\text{пад}} R$ ,  $A + R = 1$ ,  $A = \varepsilon$  выражение (13.4.) можно привести к виду

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 F_p (T_1^4 - T_2^4), \quad (13.5)$$

где  $Q_{1 \rightarrow 2}$  – полный тепловой поток между телами 1 и 2, имеющими площади поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ ;  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенная степень черноты системы рассматриваемых тел;  $F_p$  – расчетная площадь теплообмена (в качестве ее обычно берут площадь поверхности одного из тел).

Центральной проблемой расчета теплообмена излучением между твердыми телами является определение *приведенной степени черноты* системы при выбранной расчетной площади теплообмена. В общем случае приведенная степень черноты  $\varepsilon_{\text{пр}}$  зависит от степеней черноты тел, участвующих в теплообмене, формы их поверхностей, взаимного расположения тел и расстояния между ними.

Наиболее простой является система, состоящая из двух близко расположенных параллельных стенок со столь большими поверхностями, что излучение каждой из них полностью попадает на другую.

Поскольку стенки неограниченны, здесь целесообразно работать с плотностями тепловых потоков.

С учетом записанных выше соотношений имеем для тепловых потоков, посылаемых стенками 1 и 2:

$$\begin{aligned} q_1 &= E_{\text{эф}1} = E_1 + (1 - A_1)q_2; \\ q_2 &= E_{\text{эф}2} = E_2 + (1 - A_2)q_1, \end{aligned}$$

откуда

$$q_1 = \frac{E_1 + E_2 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}; \quad q_2 = \frac{E_1 + E_2 - A_2 E_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}.$$

Пусть  $T_1 > T_2$ , тогда результирующий тепловой поток будет равен

$$q_{1 \rightarrow 2} = q_1 - q_2 = \frac{A_2 E_1 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2},$$

или

$$q_{1 \rightarrow 2} = \frac{(1/A_1)E_1 - (1/A_2)E_2}{1/A_2 + 1/A_1 - 1}.$$

В силу законов Стефана – Больцмана ( $E = \varepsilon \sigma_0 T^4$ ) и Кирхгофа ( $A = \varepsilon$ ) окончательно получаем

$$q_{1 \rightarrow 2} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4),$$

где приведенная степень черноты

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}. \quad (13.6)$$

Как видно, в простейшем случае параллельных стенок приведенная степень черноты определяется только величинами  $\varepsilon_i$  поверхностей излучения. К такой системе можно приближенно свести достаточно много реальных сочетаний тел, участвующих в лучистом теплообмене.

Другая часто встречающаяся упрощенная система – совокупность двух тел, одно из которых полностью охвачено поверхностью другого (внешнего) тела. В этом случае излучение внутреннего тела 1 полностью попадает на поверхность охватывающей оболочки 2, а тепловой поток, посылаемый оболочкой, частично «переизлучается» на нее саму. Такая особенность системы учитывается соотношением для приведенной степени черноты, которое имеет вид

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \right]^{-1}, \quad (13.7)$$

если в качестве расчетной площади теплообмена  $F_p$  в зависимости (13.5) принять площадь поверхности внутреннего тела  $F_1$ .

Для более сложных систем (рис. 13.2) приведенную степень черноты обычно находят по формуле  $\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tilde{\varphi}$ , где коэффициент облученности

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{F_p} \int \int_{F_1 F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2 \quad (13.8)$$

учитывает основные характеристики системы тел: размер и форму поверхностей, их взаимное расположение, включая расстояние  $r$  между

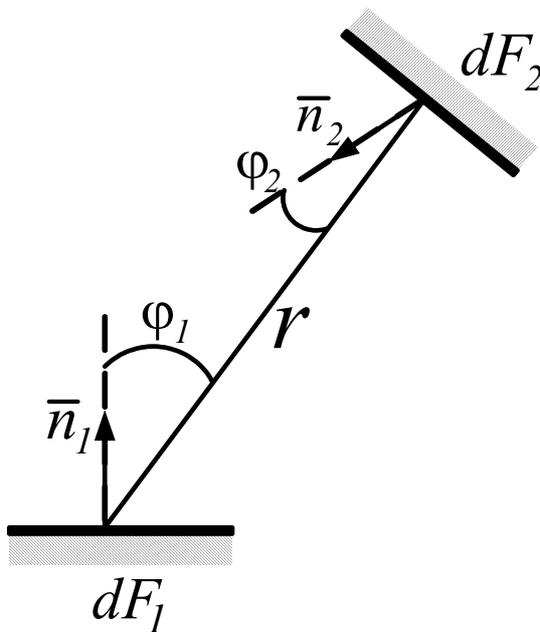


Рис. 13.2

элементами  $dF_i$  поверхностей. Для наиболее часто встречающихся систем коэффициенты облученности уже вычислены; их значения можно найти в справочниках.

Если необходимо уменьшить теплообмен излучением, между «участниками» процесса устанавливают радиационно непрозрачные разделительные экраны с большой отражательной способностью (то есть с малой величиной  $A$ , или, согласно закону Кирхгофа, с малой степенью черноты  $\varepsilon$ ).

Оценим «заградительное» действие экранов на примере рассмотренной ранее системы двух параллельных бесконечных стенок. Для простоты примем, что степени черноты стенок 1 и 2, а также экрана «э» одинаковы:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ . Тогда приведенная степень черноты всех систем (1 – э, э – 2 и 1 – 2 без экрана), согласно формуле (13.6), будет равна  $\varepsilon_{\text{пр}} = 1/(2/\varepsilon - 1)$ .

В силу стационарности процесса тепловые потоки  $q_{1\varepsilon} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_1^4 - T_\varepsilon^4)$  и  $q_{\varepsilon 2} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_\varepsilon^4 - T_2^4)$  одинаковы и равны результирующему тепловому потоку  $(q_{12})_\varepsilon$ . Выразим из запи-

санных соотношений разности  $T_1^4 - T_3^4$  и  $T_3^4 - T_2^4$  через  $(q_{12})_э$ , далее просуммируем их, в итоге получим

$$(q_{12})_э = 0,5 \varepsilon_{пр} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4).$$

Сопоставление этой формулы с полученной ранее зависимостью для  $Q_{12}$  параллельных стенок без разделительного экрана показывает, что один экран с  $\varepsilon_э = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$  уменьшает тепловой поток в 2 раза. Можно показать, что при установке  $n$  таких экранов поток теплоты сокращается в  $(n + 1)$  раз. При произвольных степенях черноты стенок и экранов будет

$$\frac{(q_{12})_э}{Q_{12}} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{пр} \sum_{i=1}^n (2/\varepsilon_{э_i} - 1)}, \quad (13.9)$$

где  $\varepsilon_{пр}$  – приведенная степень черноты системы без экранов согласно (13.6)

Заметим, что вывод о полезности установки экранов сохраняет силу и при высоких значениях  $\varepsilon_э$ , включая предельный случай  $\varepsilon_э = 1$ . Однако уменьшение степени черноты экранов существенно сказывается на эффективности их установки. Так, один экран из стали листовой шлифованной, имеющий, как и стенки из того же материала, степень черноты  $\varepsilon = 0,56$ , уменьшает тепловой поток в 2 раза, а экран из полированного алюминия с  $\varepsilon_э = 0,045$  при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,56$  сокращает поток теплоты уже в 18 раз.

### 13.3. Теплообмен излучением между газом и оболочкой

Тепловая радиация газа зависит от его состава и термодинамического состояния. Спектр излучения газа, как указывалось ранее, прерывист. Он состоит из линий, полос и непрерывных участков, расположенных в широком диапазоне длин волн, что объясняется вкладом излучения всех составляющих газа (молекул, атомов, ионов).

Радиационные свойства газа характеризуют посредством коэффициентов излучения, поглощения и рассеивания (последний коэффициент вводят для газов, содержащих твердые или жидкие частицы, когда газ приобретает свойства дисперсной среды). Одноатомные газы и двухатомные, состоящие из однородных атомов ( $N_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2$ ), имеют малую излучательную и поглощательную способности. Поэтому в инженерных расчетах их обычно рассматривают как прозрачные

среды. Значительной способностью излучать и поглощать лучистую энергию обладают многоатомные газы, в частности  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$  (они входят в состав продуктов сгорания углеводородных топлив). Для таких газов указанный выше подход неприемлем, и если они находятся между твердыми телами, то представленные в подразд. 13.2 зависимости для расчета теплового взаимодействия поверхностей непригодны.

При корректной постановке задачи здесь следует решать уравнение переноса энергии в излучающе-поглощающей среде:

$$dI_\lambda / dl = a_\lambda (I_{\lambda_0} - I_\lambda),$$

где  $I_\lambda$  – спектральная интенсивность излучения в направлении  $l$ ;  $I_{\lambda_0}$  – то же для абсолютно черного тела, находящегося при температуре газа;  $a_\lambda$  – спектральный коэффициент поглощения (относительное изменение уменьшения интенсивности излучения на единицу длины луча). Для сред, где происходит еще и рассеивание излучения, уравнение переноса существенно усложняется, превращаясь в интегродифференциальное.

Инженерные теплотехнические расчеты обычно ведут с использованием осредненных характеристик газового объема, таких как суммарная энергия его излучения и суммарное поглощение им внешнего лучистого потока. Эти характеристики, в принципе, могут быть получены решением записанного выше уравнения переноса энергии при соответствующих граничных условиях. Однако такой путь реализуют крайне редко ввиду его сложности. На практике используют экспериментальные данные по собственному излучению газов, а также их способности поглощать падающее излучение окружающих стенок. Эти данные обычно представлены в справочниках в виде номограмм.

Поскольку излучение и поглощение газов носят объемный характер, соответствующие свойства газа зависят от толщины слоя среды и концентрации излучающих и поглощающих объектов (молекул, атомов, ионов). Поэтому коэффициенты теплового излучения газового объема зависят от произведения парциального давления  $p$  на среднюю длину луча  $l$  в пределах слоя газа. Если собственное излучение газового объема вычислять по соотношению  $q = \varepsilon_f \sigma_0 T^4$ , то степень черноты газа  $\varepsilon_f$  будет еще и функцией температуры, так как излучаемая газом энергия пропорциональна абсолютной температуре в степени, меньшей четырех.

Номограммы для  $\varepsilon_f$  составлены таким образом, что вычисляемая по приведенной формуле плотность теплового потока  $q$  будет определять излучение, проходящее через единичную площадку из окру-

жающей ее газовой полусферы. В этом случае длина пути луча  $l$  по всем направлениям одинакова и равна радиусу полусферы. Излучение других объемов можно заменить излучением такой эквивалентной газовой полусферы, если радиус ее вычислить как  $l = 3,6V/F$ , где  $V$  – величина рассматриваемого объема,  $F$  – площадь поверхности его оболочки.

Номограммы  $\varepsilon_f = f(T, pl)$  обычно имеются для  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ . Степень черноты для смеси этих газов

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \varepsilon_{\text{CO}_2} \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}; \quad (13.10)$$

последний член здесь учитывает взаимопоглощение из-за частичного совпадения полос излучения и поглощения в спектрах  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ .

Степень черноты  $\varepsilon_{\text{CO}_2}$  берут непосредственно по номограмме, а

величину  $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$  вычисляют с использованием формулы

$\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = 1 - (1 - \varepsilon'_{\text{H}_2\text{O}})^n$ , где значения  $\varepsilon'_{\text{H}_2\text{O}}$  и  $n$  определяют по номограммам (последнее соотношение учитывает более сильное влияние парциального давления  $p$  по сравнению с длиной пути луча  $l$  для  $\text{H}_2\text{O}$ ).

Изложенное позволяет определить собственное излучение газового объема. Если последний окружен оболочкой, необходимо учитывать излучение стенок, частичное поглощение его газом и отражение от стенок излучения газа. Такие расчеты требуют знания коэффициента  $A_{fw}$  поглощения газового объема по отношению к эффективному излучению стенок; они достаточно приближены.

Упомянутый коэффициент  $A_{fw}$  не является физической характеристикой газа, поскольку зависит от спектра падающего излучения и температуры стенок. Только при равновесном излучении ( $T_f = T_w$ ) он становится таковой, ибо в соответствии с законом Кирхгофа будет  $A_f = \varepsilon_f$ .

Для величины  $A_{fw}$  газового объема, имеющего везде температуру  $T_f$ , по отношению к излучению абсолютно черной оболочки с температурой  $T_w$  получены эмпирические зависимости:

$$A_{fw} = \varepsilon'_{fw} (T_f/T_w)^{0,65}; \quad A_{fw} = \varepsilon'_{fw} (T_f/T_w)^{0,45}, \quad (13.11)$$

из которых первая отвечает  $\text{CO}_2$ , а вторая –  $\text{H}_2\text{O}$ . Здесь  $\varepsilon'_{fw}$  – степень черноты газового объема при температуре  $T_w$ , действительной

средней длине луча и «пересчитанном» парциальном давлении  $p' = p(T_w/T_f)$ ; значения  $\varepsilon'_{fw}$  находят по номограммам.

Если определять  $A_{fw}$  согласно зависимостям (13.11), то плотность лучистого потока от газа к «серой» стенке:

$$q = \varepsilon'_w \sigma_0 (\varepsilon_f T_f^4 - A_{fw} T_w^4), \quad (13.12)$$

где приведенная степень черноты стенки  $\varepsilon'_w = 0,5(1 + \varepsilon_w)$  учитывает первые отражения (последняя формула справедлива при степени черноты стенки  $\varepsilon_w \geq 0,8$ ).

Некоторые авторы рекомендуют определять приведенную степень черноты стенки по выражению

$$\varepsilon'_w = \varepsilon_w [1 + (1 - \varepsilon_w)(1 - \varepsilon_f)], \quad (13.13)$$

а значение  $A_{fw}$  принимать равным степени черноты газа  $\varepsilon_f$ , подсчитанной при температуре стенки  $T_w$ .

Рекомендуемые выше расчетные соотношения пригодны в случае неизменных значений температур газового объема и оболочки. Если поле температуры газа неоднородно, а различные части поверхности оболочки имеют разные оптические характеристики и значения температуры, ситуация существенно усложняется. Выходом из нее может быть использование *зонального метода*, когда газ и оболочку делят на определенное число объемов и площадок, которые можно считать изотермными. Для каждой такой ячейки записывают уравнения баланса энергии, после чего полученную систему уравнений решают относительно неизвестных лучистых потоков теплоты.

Еще сложнее ситуация при описании излучения движущегося газа и горения в нем твердых или жидких частиц. Такие задачи характерны для камер сгорания двигателей летательных аппаратов. Методы их решения рассмотрены в специальной литературе.

## Глава 14. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

### 14.1. Передача теплоты через стенку

#### 14.1.1. Исходные положения

*Сложным* называют теплообмен, при котором одновременно присутствуют рассмотренные в главах 11, 12, 13 процессы переноса теплоты посредством теплопроводности, конвекции, излучения (все сразу или два из них). Процессы могут протекать как в одной и той же части пространства, так и в разных, но примыкающих друг к другу частях, составляющих единую расчетную область.

В инженерной теплопередаче задачи сложного теплообмена обычно упрощают: при протекании в одной части пространства различных процессов вводят принцип их аддитивности, а в случае реализации процессов в разных областях один из них заменяют соответствующим граничным условием или дополнительным членом в уравнении теплообмена.

Замену процесса граничным условием используют, в частности, рассматривая перенос теплоты от одной текучей среды к другой через разделяющую их твердую стенку. Проблему сводят к решению задачи теплопроводности в стенке (см. подразд. 11.3), выставив на ее поверхностях граничные условия третьего рода в виде закона Ньютона – Рихмана (см. подразд. 12.1.2). Величину коэффициента теплоотдачи в нем находят предварительно по критериальным уравнениям конвективного теплообмена, представленным в подразд. 12.3. Если для вычисления определяющих критериев подобия необходимы значения температуры поверхностей стенки, которые до решения задачи теплопроводности неизвестны, прибегают к методу последовательных приближений.

#### 14.1.2. Плоская стенка

Рассмотрим плоскую однородную неограниченную стенку без тепловыделения с  $\lambda = \text{const}$ , расположенную перпендикулярно оси  $X$ . Обе поверхности стенки (толщина ее равна  $\delta$ ) «омываются» текучими средами, которые имеют температуры  $T_{f_1} > T_{f_2}$  для сред, расположенных слева и справа от стенки; соответствующие коэффициенты теплоотдачи равны  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Решение стационарной задачи совпадает с изложенным в подразд. 11.3.1 до этапа поиска констант интегрирования. Последние здесь находят по граничным условиям третьего рода. Они определяются законом Ньютона – Рихмана (12.1), который мы запишем в виде  $-\lambda(\partial T/\partial n)_w = \alpha(T_w - T_f)$ , используя закон Фурье (11.5) Эти условия позволяют определить только первую постоянную интегрирования:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{\alpha}{\lambda}(T_w - T_f).$$

Заметим, что она содержит неизвестную величину – температуру стенки  $T_w$  (заданы только значения  $\alpha$ ,  $\lambda$  и  $T_f$ ).

Однако неизвестные  $T_{w_1}$  и  $T_{w_2}$  можно исключить, если сложить равенства

$$\begin{aligned} T_{f_1} - T_{w_1} &= q/\alpha_1; \\ T_{w_2} - T_{f_2} &= q/\alpha_2; \\ T_{w_1} - T_{w_2} &= q\delta/\lambda. \end{aligned}$$

Два из них выражают граничные условия на левой и правой поверхностях стенки; последнее равенство отвечает решению (11.13). Сложив эти равенства, имеем

$$T_{f_1} - T_{f_2} = q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right). \quad (14.1)$$

Определив отсюда плотность теплового потока  $q$ , находим по граничным условиям  $T_{w_1}$  и  $T_{w_2}$  и далее по формуле (11.12) вычисляем  $T$  – температуру в любом сечении стенки.

Выражение в скобках соотношения (14.1) называют удельным термическим сопротивлением теплопередачи. Оно складывается из соответствующих сопротивлений теплопроводности  $\delta/\lambda$  (см. формулу (11.14)) и теплоотдачи  $R_{уд\alpha} = 1/\alpha$ . Связь (14.1) обычно пишут в виде

$$T_{f_1} - T_{f_2} = q/k, \quad (14.2)$$

где *коэффициент теплопередачи*

$$k = 1 / \left( 1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2 \right). \quad (14.3)$$

Для многослойной стенки (см. подразд. 11.3.2) все сказанное сохраняет силу, но коэффициент теплопередачи здесь

$$k = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}, \quad (14.4)$$

а температуру внутри стенки определяют по формуле (11.15).

Выражение (14.4) отвечает идеальному тепловому контакту слоев. Если контакт неидеален, в скобки следует добавить сумму удельных контактных термических сопротивлений (см. подразд. 11.5).

### 14.1.3. Цилиндрическая стенка

Сохранив представленную выше постановку задачи для цилиндрической стенки толщиной  $\delta = r_2 - r_1$ , используем тот же прием и результаты подразд. 11.3.4. В итоге имеем

$$T_{f_1} - T_{f_2} = q_l \left( \frac{1}{2\pi r_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_2 \alpha_2} \right), \quad (14.5)$$

где  $q_l = Q/l$  – линейная плотность теплового потока для стенки высотой  $l$ , а выражение в скобках – линейное термическое сопротивление теплопередачи. Обратную ему величину называют *линейным коэффициентом теплопередачи*  $k_l$ . Обычно таковым считают несколько иное соотношение:

$$k_l = \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)^{-1}, \quad (14.6)$$

вычисляя при этом линейную плотность теплового потока как

$$q_l = \pi k_l (T_{f_1} - T_{f_2}). \quad (14.7)$$

В случае многослойной цилиндрической стенки линейный коэффициент теплопередачи вида (14.6) следует записывать как

$$k_l = \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_{k_i}}{d_{i+1}} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}} \right)^{-1}. \quad (14.8)$$

Здесь  $R_{k_i}$  – линейный аналог удельного термического сопротивления контакта согласно подразд. 11.5.

#### 14.1.4. Управление теплопередачей

Рассмотрим возможности увеличения или уменьшения передаваемого теплового потока при неизменных  $T_{f_1}$  и  $T_{f_2}$  на примере цилиндрической стенки.

Согласно формуле (14.7), для увеличения теплового потока через стенку следует принять меры к увеличению линейного коэффициента теплопередачи. Соответственно выражению (14.6), это можно сделать за счет увеличения  $\lambda$ , уменьшения толщины стенки, увеличения коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , увеличения поверхностей теплоотдачи  $F_1$  и  $F_2$  (например, за счет оребрения). Анализ показывает, что эффективным является уменьшение максимального из слагаемых в формуле (14.6). Если говорить о линейных термических сопротивлениях теплоотдачи  $1/(\alpha d)$ , то эффективно увеличение меньшего из коэффициентов теплоотдачи и оребрение поверхности

на его стороне (при  $\alpha_2 \ll \alpha_1$  увеличение  $F_2$  посредством оребрения целесообразно до тех пор, пока  $\alpha_2 F_2$  не сравняется с  $\alpha_1 F_1$ ).

Для уменьшения теплопередачи необходимо принять противоположные меры. В частности, одним из способов такого уменьшения является нанесение материала с малым  $\lambda$  на внешнюю поверхность трубы. Однако анализ выражения (14.8) показывает, что такая *теплоизоляция* этой поверхности не всегда приводит к уменьшению теплового потока через стенку, ибо увеличение линейного термического сопротивления теплопроводности при этом сопровождается уменьшением линейного термического сопротивления теплоотдачи (из-за роста  $d_{n+1}$ ).

Условие целесообразности нанесения изоляции выясним на примере однородной трубы с внутренним  $d_1$  и наружным  $d_2$  диаметрами, покрытой слоем изоляции толщиной  $(d_{из} - d_2)/2$ . Для такой трубы зависимость (14.8) приобретает вид

$$k_l = \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_T} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_{из}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_{из}} \right)^{-1},$$

если пренебречь термическим сопротивлением контакта (здесь  $\lambda_{из}$  и  $\lambda_T$  – коэффициенты теплопроводности изоляции и трубы).

Подстановка этого выражения в формулу (14.7) и последующее построение графика функции  $q_l = f(d_{из})$  позволяют установить, что эта функция имеет максимум при так называемом *критическом* значении диаметра изоляции  $d_{из_{кр}} = 2\lambda_{из} / \alpha_2$ .

В зоне  $d_{из} < d_{из_{кр}}$  линейная плотность теплового потока  $q_l$  увеличивается с ростом  $d_{из}$ , то есть изоляция не выполняет своего назначения. Лишь при  $d_{из} > d_{из_{кр}}$  наращивание слоя изоляции дает снижение  $q_l$ . По этой причине считают, что нанесение изоляции эффективно только для труб, наружный диаметр которых  $d_2 \geq d_{из_{кр}}$ .

## 14.2. Поле температуры в теле с источниками теплоты

### 14.2.1. Неограниченная плоская стенка с равномерным охлаждением поверхностей

Рассмотрим стационарное одномерное поле температуры в однородной безграничной плоской стенке толщиной  $2\delta$ , размещенной перпендикулярно оси  $X$  и омываемой с двух сторон текучей средой ( $T_{f_1} = T_{f_2}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$ ). Стенка содержит равномерно распределенные источники теплоты с объемной плотностью  $q_v$ ,  $\text{Вт}/\text{м}^3$ , не изменяющейся во времени; коэффициент теплопроводности материала стенки  $\lambda$  не зависит от температуры.

Поскольку условия теплоотдачи с обеих сторон стенки одинаковы, температурное поле симметрично относительно ее средней линии. Разместив на ней начало координат, имеем граничные условия:  $dT/dx = 0$  при  $x = 0$ ;  $-\lambda(dT/dx)_w = \alpha(T_w - T_f)$  при  $x = \delta$ .

Симметричный отвод теплоты и равномерное размещение ее источников позволяют решить задачу, используя лишь закон Фурье (11.5). Согласно ему  $q = -\lambda dT/dx$ , а ввиду указанных условий  $q = q_v x$ . Сравнение этих выражений дает

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda} x,$$

откуда

$$T = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + C. \quad (14.9)$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдем из граничного условия при  $x = \delta$ : здесь  $-\lambda(dT/dx)_w = -q_v \delta$ , так что  $T_w = T_f + q_v \delta / \alpha$ . Подставив значение  $T_w$  в решение (14.9), получим

$$C = T_f + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}.$$

Следовательно, уравнением температурного поля будет выражение

$$T = T_f + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad (14.10)$$

(температура распределена по параболическому закону). На поверхности она равна  $T_w = T_f + q_v \delta / \alpha$ , а максимум температуры соответствует середине пластины: при  $x = 0$  будет  $T_{\max} = T_f + q_v \delta [1/\alpha + \delta / (2\lambda)]$ .

#### 14.2.2. Сплошной круговой цилиндр с равномерным охлаждением

Постановка рассматриваемой задачи аналогична представленной в подразд. 14.2.1; изменились только геометрия тела и условия его охлаждения – последнее стало односторонним (по наружной поверхности цилиндра). Заметим, что и здесь тепловой поток определяется объемной плотностью внутренних теплоисточников  $q_v$  и поперечными размерами тела. Так, для линейной плотности теплового потока  $q_l = Q/l$  имеем  $q_l = q_v \pi r^2$ .

Подставив  $q_l$  в закон Фурье

$$\frac{Q}{2\pi r l} = -\lambda \frac{dT}{dr}, \quad (14.11)$$

получаем после разделения переменных

$$dT = -\frac{q_v}{2\lambda} r dr.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$T = -\frac{q_v}{4\lambda} r^2 + C.$$

Значение константы  $C$  можно найти, переписав последнее соотношение для наружной поверхности цилиндра. При  $r = r_w$  имеем  $T = T_w$ , так что

$$C = T_w + \frac{q_v}{4\lambda} r_w^2.$$

В свою очередь, значение температуры  $T_w$  следует из уравнения теплового баланса на поверхности. Здесь  $q_v \pi r_w^2 = \alpha (T_w - T_f) 2\pi r_w$ , откуда

$$T_w = T_f + \frac{q_v r_w}{2\alpha}.$$

Подставив это значение в найденное ранее выражение для  $C$ , получаем далее распределение температуры по радиусу цилиндра:

$$T = T_f + \frac{q_v r_w}{2\alpha} + \frac{q_v r_w^2}{4\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_w} \right)^2 \right]. \quad (14.12)$$

Максимальное значение температуры соответствует оси цилиндра: при  $r = 0$  имеем

$$T_{\max} = T_f + \frac{q_v r_w}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{r_w}{2\lambda} \right).$$

На единицу длины цилиндра с его поверхности «отводится» тепловой поток  $q_{l/w} = q_v \pi r_w^2$ .

### 14.2.3. Коаксиальный круговой цилиндр с равномерным охлаждением поверхностей

Эта задача отличается от предыдущей тем, что тепловыделяющий цилиндр полый, а охлаждение его ведется как по наружной, так и по внутренней поверхностям, имеющим радиусы  $r_2$  и  $r_1$  соответственно. Примем, что на этих поверхностях условия охлаждения различны:  $T_{f_2} \neq T_{f_1}$ ,  $\alpha_2 \neq \alpha_1$ .

Двухсторонний несимметричный отвод теплоты не позволяет применить использованный в подразд. 14.2.1 и 14.2.2 простой прием. Здесь надо записать уравнение Пуассона (11.10); в полярной системе координат оно имеет вид

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (14.13)$$

Решение его таково:

$$T = -\frac{q_v}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (14.14)$$

Постоянные интегрирования находим из граничных условий

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_i} = \alpha_i (T_{w_i} - T_{f_i}),$$

где индекс  $i$  принимает значение  $i = 1$  для внутренней поверхности цилиндра и  $i = 2$  для наружной.

Совместное решение граничных условий после подстановки в них соотношения (14.14) дает

$$C_1 = \{0,5q_v[G + H] - (T_{f_1} - T_{f_2})\} / (E + F);$$

$$C_2 = \{0,5q_v[GF - HE] + T_{f_1}E + T_{f_2}F\} / (E + F),$$

где  $G = r_2^2(A + D)$ ;  $H = r_1^2(B - D)$ ;  $A = 1/(\alpha_2 r_2)$ ;  
 $B = 1/(\alpha_1 r_1)$ ;  $D = 1/(2\lambda)$ ;  $E = \lambda A + \ln r_2$ ;  $F = \lambda B - \ln r_2$ .

Радиус окружности с наибольшей температурой

$$r|_{T_{\max}} = \sqrt{2\lambda C_1 / q_v}$$

получаем из условия  $dT/dr = 0$ . Подстановка  $r|_{T_{\max}}$  в решение (14.14) дает максимальное значение температуры цилиндра:

$$T_{\max} = C_2 + C_1 (\ln \sqrt{2\lambda C_1 / q_v} - 0,5). \quad (14.15)$$

Температуру внутренней и наружной поверхностей находим, подставляя в соотношение (14.14) значения  $r_1$  и  $r_2$  соответственно, а отводимую от этих поверхностей теплоту вычисляем по закону Ньютона – Рихмана: линейная плотность теплового потока здесь  $q_{l_i} = 2\pi r_{w_i} \alpha_i (T_{w_i} - T_{f_i})$ .

#### 14.2.4. Распределение температуры вдоль коаксиального цилиндра с внутренним охлаждением

Рассмотрим тепловыделяющий полый цилиндр длиной  $l$ , внутри которого движется охладитель с массовым расходом  $\dot{m} = \rho W A_K$ , где  $\rho$  – плотность охладителя,  $W$  – скорость его течения,  $A_K = \pi r_1^2$  – площадь сечения внутреннего канала. Примем, что поле температуры в поперечном сечении цилиндра  $A_{\text{ц}} = \pi(r_2^2 - r_1^2)$  можно считать однородным, а расчету подлежит изменение температуры вдоль  $l$ .

Предположим, что объемная плотность равномерно размещенных теплоисточников  $q_v = \text{const}$  известна. Кроме того, вся теплота, выделяющаяся на длине  $dx$  цилиндра, полностью отводится к охладителю (то есть отсутствуют продольные перетечки теплоты, что эквивалентно условию  $\lambda_{\text{ц}} = 0$ ). В этом случае поставленная задача имеет простое решение.

Действительно, согласно условию теплового баланса, имеем

$$q_v A_{\text{ц}} dx = \dot{m} c dT_0, \quad (14.16)$$

где  $C$  – удельная теплоемкость охладителя,  $dT_o$  – прирост его температуры на длине  $dx$ . С другой стороны, по закону Ньютона – Рихмана

$$q_v A_{\text{ц}} dx = \alpha (T_{\text{ц}} - T_o) \Pi_{\text{к}} dx, \quad (14.17)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от цилиндра к охладителю,  $\Pi_{\text{к}} = 2\pi r_1$  – периметр канала в цилиндре.

Постоянство  $q_v$  вдоль цилиндра дает возможность переписать условие (14.16) в виде

$$q_v A_{\text{ц}} x = \dot{m} c (T_o - T_{o_{\text{вх}}}),$$

откуда температура охладителя в сечении  $X$  канала:

$$T_o = T_{o_{\text{вх}}} + \frac{q_v A_{\text{ц}}}{\dot{m} c} x. \quad (14.18)$$

Здесь  $T_{o_{\text{вх}}}$  – температура охладителя на входе в канал. Как видно, при введенных допущениях распределение температуры охладителя по длине канала линейно.

Соотношение (14.17) позволяет выразить искомую температуру цилиндра  $T_{\text{ц}}$  через найденную величину  $T_o$ :

$$T_{\text{ц}} = T_o + \frac{q_v A_{\text{ц}}}{\alpha \Pi_{\text{к}}} \quad (14.19)$$

Если принять  $\alpha = \text{const}$ , то превышение температуры цилиндра над температурой охладителя  $T_{\text{ц}} - T_o$  будет неизменным по длине.

Задача существенно усложнится, если учесть продольные перетечки теплоты по цилиндру и принять, что  $q_v$  есть функцией температуры. Обычно эту функцию берут линейной:  $q_v = q'_v (1 + \beta \vartheta_{\text{ц}})$ , где  $\vartheta_{\text{ц}} = T_{\text{ц}} - T_{o_{\text{вх}}}$  – превышение температуры цилиндра над температурой охладителя на входе;  $\beta$  – температурный коэффициент тепловыделения;  $q'_v$  – объемная плотность источников теплоты при  $\vartheta_{\text{ц}} = 0$ .

В этом случае необходимо решать дифференциальное уравнение теплопроводности. Его можно записать в виде уравнения Пуассона (11.10), если отводу теплоты к охладителю поставить в соответствие распределенные по длине цилиндра стоки теплоты с объемной плотностью  $q_o = \alpha (\vartheta_{\text{ц}} - \vartheta_o) \Pi_{\text{к}} / A_{\text{ц}}$ , где  $\vartheta_o = T_o - T_{o_{\text{вх}}}$  – превы-

шение температуры охладителя над значением ее в сечении входа. Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности примет вид

$$d^2 \vartheta_{\text{ц}} / dx^2 + (q_v - q_o) / \lambda = 0,$$

или

$$\frac{d^2 \vartheta_{\text{ц}}}{dx^2} + \frac{1}{\lambda} \left[ q'_v (1 + \beta \vartheta_{\text{ц}}) - \alpha (\vartheta_{\text{ц}} - \vartheta_o) \frac{\Pi_k}{A_{\text{ц}}} \right] = 0. \quad (14.20)$$

Недостаток этой формы записи уравнения теплопроводности – наличие в ней двух неизвестных ( $\vartheta_{\text{ц}}$  и  $\vartheta_o$ ). Чтобы перейти к одной неизвестной, выразим  $\vartheta_{\text{ц}}$  через  $\vartheta_o$ , используя условие теплового баланса на поверхности канала. Здесь  $\alpha (\vartheta_{\text{ц}} - \vartheta_o) \Pi_k dx = \dot{m} c d\vartheta_o$ , откуда

$$\vartheta_{\text{ц}} = \vartheta_o + \frac{\dot{m} c}{\alpha \Pi_k} \frac{d\vartheta_o}{dx}. \quad (14.21)$$

Приняв  $\dot{m} c / (\alpha \Pi_k) = \text{const}$ , подставим это значение  $\vartheta_{\text{ц}}$  и его вторую производную в уравнение (14.20). После некоторых перестановок получаем неоднородное линейное уравнение третьего порядка:

$$\frac{d^3 \vartheta_o}{dx^3} + a_2 \frac{d^2 \vartheta_o}{dx^2} + a_1 \frac{d\vartheta_o}{dx} + a_0 \vartheta_o = -\frac{a_0}{\beta}, \quad (14.22)$$

где постоянные коэффициенты

$$a_2 = \frac{\alpha \Pi_k}{\dot{m} c}; \quad a_1 = \nu - \frac{\alpha \Pi_k}{\lambda A_{\text{ц}}}; \quad a_0 = a_2 \nu; \quad \nu = \frac{\beta q'_v}{\lambda}.$$

Это уравнение имеет общие решения

$$\vartheta_o = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} - 1/\beta \quad (14.23)$$

и

$$\vartheta_o = C'_1 e^{k_1 x} + C'_2 e^{\mu x} \cos \nu x + C'_3 e^{\mu x} \sin \nu x - 1/\beta. \quad (14.24)$$

Первое из них реализуется, когда характеристическое уравнение однородной части выражения (14.22)

$$k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$$

имеет действительные корни  $k_j$ , второе – когда второй и третий корни есть комплексные сопряженные числа:  $k_2 = \mu + \nu i$ ,  $k_3 = \mu - \nu i$ .

Постоянные интегрирования  $C_1, C_2, C_3$  или  $C'_1, C'_2, C'_3$  находят из граничных условий. Последние здесь обычно берут в виде  $\vartheta_0 = 0$  при  $x = 0$  и  $d\vartheta_{\text{ц}}/dx = 0$  при  $x = 0, x = l$ . Подстановка их в решения (14.23) или (14.24) приводит к весьма громоздким выражениям для постоянных интегрирования.

Впрочем, сравнение результатов расчетов по зависимости (14.21), в которой  $\vartheta_0$  отвечает найденным таким образом решениям, и по упрощенной формуле

$$\vartheta_{\text{ц}} = \frac{q_v A_{\text{ц}}}{\alpha \Pi_{\text{к}}} (a_2 x + 1), \quad (14.25)$$

эквивалентной выражению (14.19), показывает, что полученные по ним максимальные значения  $\vartheta_{\text{ц}}$  мало отличаются при больших  $l$ , особенно если взять  $q_v$  в (14.25) при средней температуре цилиндра. Для коротких цилиндров, согласно точному решению, температура примерно постоянна вдоль  $X$ , а значение ее достаточно близко к средней величине из упрощенного решения (14.25), получаемой для  $x = l/2$ .

### 14.3. Распределение температуры в теплоотдающих стержнях и ребрах

#### 14.3.1. Стержень постоянного сечения

Рассмотрим стержень произвольного, но постоянного по координате  $X$  сечения с площадью  $A$  и периметром  $\Pi$ . Левый торец стержня ( $x = 0$ ) примыкает к стенке, имеющей температуру  $T_0$ , правый торец ( $x = l$ ), как и вся боковая поверхность стержня, контактирует с текучей средой, имеющей температуру  $T_f$  (коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ ).

Если принять, что поперечный размер стержня  $d_s = 4A/\Pi$  мал по сравнению с длиной  $l$ , то задачу можно решить как одномерную (при достаточно большом коэффициенте теплопроводности  $\lambda$  изменением температуры по сечению пренебрегают). «Боковой» отток теплоты посредством теплоотдачи учтем в одномерной модели введением распределенных по длине стержня теплостоков с объемной плотностью  $q_v = \alpha(T - T_f)\Pi/A$ . Тогда задаче отвечает уравнение Пуассона (11.10) с отрицательным значением  $Q_v$ :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{q_v}{\lambda} = 0, \quad (14.26)$$

или

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha \Pi}{\lambda A} \vartheta,$$

где  $\vartheta = T - T_f$  – превышение температуры стержня над температурой окружающей среды.

Переписав это уравнение в виде

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = m^2 \vartheta, \quad (14.27)$$

примем в нем  $m = \text{const}$  (для этого надо положить  $\alpha = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$ ; далее принято также  $T_f = \text{const}$ ). С учетом введенных ограничений можем записать общий интеграл уравнения в виде

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}.$$

Постоянные интегрирования найдем из смешанных граничных условий. При  $x = 0$  имеем  $\vartheta = \vartheta_0$ , откуда  $\vartheta_0 = C_1 + C_2$ . Если не учитывать отвод теплоты с правого торца стержня, то при  $x = l$  будет  $d\vartheta/dx = 0$ , так что  $C_1 e^{ml} - C_2 e^{-ml} = 0$ . Подставив сюда следующее из первого условия соотношение  $C_1 = \vartheta_0 - C_2$ , получим

$$C_1 = \frac{\vartheta_0 e^{-ml}}{e^{ml} + e^{-ml}}; \quad C_2 = \frac{\vartheta_0 e^{ml}}{e^{ml} + e^{-ml}},$$

с учетом чего будет

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{e^{ml} + e^{-ml}} \left( e^{-ml} e^{mx} + e^{ml} e^{-mx} \right),$$

или

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)}}{e^{ml} + e^{-ml}},$$

что можно также записать в виде

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\text{ch}[m(l-x)]}{\text{ch}(ml)}, \quad (14.28)$$

если вспомнить, что  $(e^x + e^{-x})/2 = \operatorname{ch}x$ .

Формулу (14.28) широко используют на практике, поскольку при больших  $\lambda$  доля теплоты, отводимая торцом стержня, мала по сравнению с теплотой, «снимаемой» с боковой его поверхности.

Количество теплоты, отдаваемое поверхностью стержня, всегда равно количеству теплоты, подведенному к его основанию, так что

$$Q = -\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} A = \frac{\lambda \vartheta_0 A}{\operatorname{ch}(ml)} m \operatorname{sh}(ml),$$

или

$$Q = \lambda mA\vartheta_0 \operatorname{th}(ml) = \vartheta_0 \sqrt{\alpha \Pi \lambda A} \operatorname{th}(ml). \quad (14.29)$$

Это количество теплоты отводится стержнем при найденном распределении температуры по его длине. Если бы температура стержня везде была равна  $\vartheta_0$ , то в окружающую среду отдавалась бы теплота  $Q_{\max} = \alpha \vartheta_0 \Pi l$ . Отношение теплот  $Q$  и  $Q_{\max}$  называют *коэффициентом качества* (эффективности) теплорассеивающего стержня:

$$\eta = \frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{\operatorname{th}(ml)}{ml}. \quad (14.30)$$

С учетом вида функции  $\operatorname{th}(ml)$  коэффициент эффективности тем выше, чем больше величины  $\lambda$ ,  $A/\Pi$  и меньше значения  $\alpha$ ,  $l$ .

Заметим что для учета теплоотдачи с торцевой поверхности стержня достаточно увеличить длину его на величину  $A/\Pi$ .

### 14.3.2. Теплоотдающие ребра

Все полученные формулы пригодны и для прямых ребер постоянного по высоте сечения после замены длины стержня  $l$  на высоту ребра  $h$  и пересчета значения  $m$ . Так, для ребер с основанием в виде прямоугольника со сторонами  $b$  и  $\delta$  (ширина и толщина ребра) при  $b \gg \delta$  обычно принимают  $\Pi = 2b$ , тогда  $m = \sqrt{2\alpha/(\lambda\delta)}$ .

Если сечение ребра переменено по его высоте, расчет распределения температуры и отводимой теплоты усложняется. Например, для прямых ребер трапециевидной по высоте формы и кольцевых ребер постоянной толщины распределение температуры и тепловой поток выражаются через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков.

Впрочем, существует приближенный метод расчета теплоты, отводимой упомянутыми ребрами. Он основан на замене их эквивалентным прямым ребром постоянной толщины  $\delta_3 = (\delta_o + \delta_h)/2$  с высотой  $h_3 = h + \delta_h/2$ , где  $\delta_o$  и  $\delta_h$  – толщины исходного ребра у основания и у вершины (при  $x = h$ ). Ширину эквивалентного ребра  $b_3$  для прямых исходных ребер оставляют прежней, а в случае кольцевых исходных ребер ее принимают равной средней длине окружности кольца:  $b_3 = \pi(r_h + r_o)$ , где  $r_h$  и  $r_o$  – радиус кольцевого ребра у его вершины и основания.

Плотность теплового потока, отводимого таким эквивалентным ребром с площадью боковой поверхности  $F_3$ , будет  $q_3 = Q_3/F_3$ , где  $Q_3$  соответствует зависимости (14.29) после замены длины стержня на высоту ребра  $h_3$  и пересчета величины  $m$ :  $m_3 = \sqrt{2\alpha/(\lambda\delta_3)}$ . Теплоту же, отводимую исходным ребром переменного сечения с площадью боковой поверхности  $F$ , вычисляют как

$$Q = \varepsilon q_3 F. \quad (14.31)$$

Поправочный коэффициент  $\varepsilon$  (рис. 14.1) зависит от соотношения превышений температур вершины и основания эквивалентного ребра  $(\vartheta_h/\vartheta_o)_3 = 1/\text{ch}(m_3 h_3)$ , а также геометрии исходных ребер, а именно, от величины  $\delta_h/\delta_o$  для прямого сужающегося ребра (рис. 14.1, а) и значения  $r_h/r_o$  для кольцевого ребра постоянной толщины (рис. 14.1, б).

Если кольцевое ребро выполнено сужающимся к вершине, в формулу (14.31) вместо  $\varepsilon$  вводят произведение упомянутых поправок для

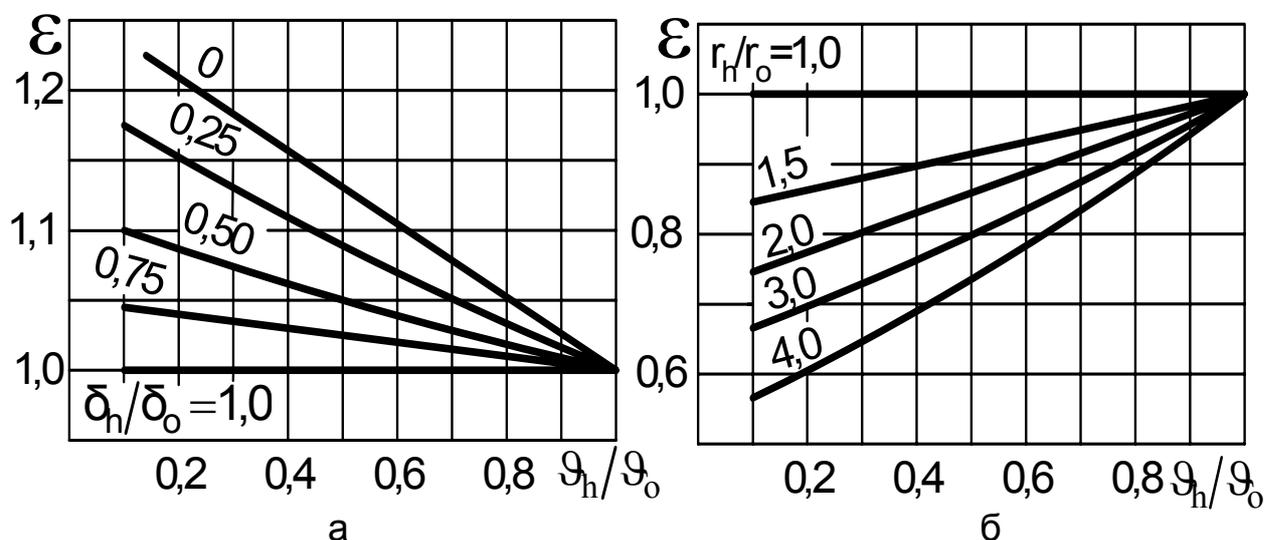


Рис. 14.1

кольцевого ребра постоянной толщины и прямого сужающегося ребра. В случае, когда кольцевое ребро имеет небольшую высоту (разность между радиусами основания и вершины), можно непосредственно использовать формулу (14.29) для прямого ребра постоянной толщины, заменив ширину ребра  $b$  на среднюю длину окружности кольца.

Расчет отводимой теплоты можно вести и с применением коэффициента качества ребра  $\eta$ . Тогда  $Q = \eta \alpha \vartheta_0 F$ , где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $\vartheta_0$  – превышение температуры основания ребра,  $F$  – площадь боковой поверхности исходного ребра. Значение  $\eta$  получают, умножив на упомянутые выше поправки  $\varepsilon$  коэффициент эффективности эквивалентного ребра  $\eta_\varepsilon$ , который вычисляют по формуле (14.30) после замены  $l$  на  $h_\varepsilon$  и  $m$  на  $m_\varepsilon$ .

В космических энергоустановках применяют ребра, отдающие теплоту в окружающую среду с температурой  $T_f$  посредством излучения. В этом случае уравнение Пуассона (14.26) следует записать как

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = n^2 (T^4 - T_f^4). \quad (14.32)$$

Здесь  $x$  – координата, отсчитываемая по высоте ребра  $h$ ;  $n^2 = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 \Pi / (\lambda A)$ , где  $\sigma_0$  – постоянная Стефана – Больцмана,  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенная степень черноты системы «поверхность ребра – окружающая среда». При большом отношении ширины ребра  $b$  к его толщине  $\delta$  берут  $\Pi = 2b$ , так что  $n^2 = 2 \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 / (\lambda \delta)$ .

Если целью расчета является определение излучаемой ребром теплоты, достаточно найти градиент температуры  $dT/dx$  в корневом сечении. Тогда целесообразно приведение уравнения (14.32) к виду

$$\partial \frac{d\partial}{dT} = n^2 (T^4 - T_f^4)$$

введением переменной  $\partial = dT/dx$ . Решение этого уравнения дает

$$dT/dx = 0,633n \sqrt{T^5 - 5TT_f^4 + C},$$

если принять  $n = \text{const}$ . Значение постоянной интегрирования  $C = 4T_f^5$  следует из граничного условия на вершине ребра, где при достаточно больших  $h$  можно считать  $dT/dx = 0$ ,  $T = T_f$ .

Подставив полученную величину  $dT/dx$  для корневого сечения ребра (здесь  $T = T_0$ ) в закон Фурье  $q = -\lambda dT/dx$  и далее в соотношение  $Q = qA$ , получаем выражение для теплоты, отводимой излучающим ребром:

$$Q = -0,633 \sqrt{\varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 \lambda \Pi A T_0^5 (1 - 5\bar{T}_f^4 + 4\bar{T}_f^5)}, \quad (14.33)$$

где  $\bar{T}_f = T_f/T_0$ . В случае, когда излучатель состоит из нескольких ребер, при назначении приведенной степени черноты  $\varepsilon_{\text{пр}}$  следует учесть переизлучение в системе ребер, если таковое имеется.

### 14.3.3. Теплопередача через ребристую плоскую стенку

В подразд. 14.1.4 отмечалось, что одним из способов интенсификации теплопередачи является оребрение стенки, особенно с той стороны, где меньше коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ . В связи с этим рассмотрим стенку с односторонним оребрением (рис. 14.2). Согласно законам Ньютона – Рихмана и Фурье, запишем выражения для тепловых потоков: входящего в стенку, проходящего через ее основание и

выходящего из нее (в расчете «на одно ребро»):

$$Q = \alpha_1 (T_{f1} - T_{w1}) F_{w1};$$

$$Q = \frac{\lambda}{\delta_w} (T_{w1} - T_{w2}) F_{w1}$$

$$Q = \alpha_{\text{пр}} (T_{w2} - T_{f2}) F_{\text{пр}}$$

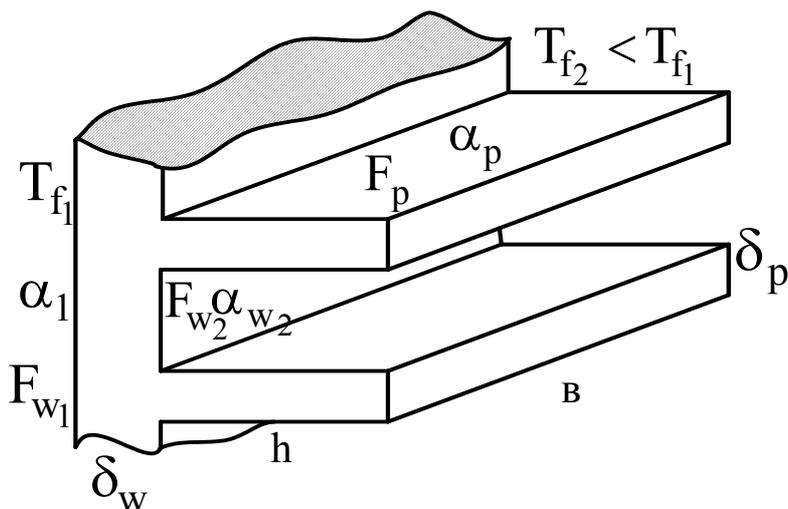


Рис. 14.2

Здесь  $F_{w1}$  – площадь поверхности стенки с неоребренной стороны, приходящаяся «на одно

ребро»;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала стенки;  $\alpha_{\text{пр}}$  – «приведенный» коэффициент теплоотдачи на суммарной поверхно-

сти оребренной стороны площадью  $F_{pc} = F_p + F_{w_2}$ , где  $F_p$  – площадь поверхности ребра,  $F_{w_2}$  – площадь поверхности основания стенки между двумя ребрами.

Найдя из этих формул температурные напоры и просуммировав их, получим

$$T_{f_1} - T_{f_2} = Q \left( \frac{1}{\alpha_1 F_{w_1}} + \frac{\delta_w}{\lambda F_{w_1}} + \frac{1}{\alpha_{пр} F_{pc}} \right). \quad (14.34)$$

Введя плотность теплового потока как  $q = Q/F_{w_1}$ , имеем

$$T_{f_1} - T_{f_2} = q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_w}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{пр} F_{pc}/F_{w_1}} \right).$$

Выражение в скобках есть удельное термическое сопротивление теплопередачи ребристой стенки, а обратная величина

$$k_{pc} = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_w}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{пр} k_{op}} \right)^{-1} \quad (14.35)$$

представляет собой ее коэффициент теплопередачи (при отнесении теплового потока к неоребренной поверхности стенки). В последнем выражении  $k_{op} = F_{pc}/F_{w_1}$  – коэффициент оребрения.

Приведенный коэффициент теплоотдачи на оребренной стороне стенки найдем, сопоставляя два выражения для  $Q$ :

$$\alpha_{пр} (T_{w_2} - T_{f_2}) F_{pc} = Q_{w_2} + Q_p = \alpha_{w_2} (T_{w_2} - T_{f_2}) F_{w_2} + \alpha_p (T_{w_2} - T_{f_2}) F_p \eta$$

(последнее слагаемое здесь записано в соответствии с формулой (14.30)). Из этого равенства имеем

$$\alpha_{пр} = \alpha_{w_2} \frac{F_{w_2}}{F_{pc}} + \alpha_p \frac{F_p}{F_{pc}} \eta. \quad (14.36)$$

Найдя по формуле (14.34) значение  $Q$ , далее по записанным ранее выражениям для  $Q$  вычисляем температуры основания стенки  $T_{w_1}$  и  $T_{w_2}$  на левой и правой ее стороне. Величина  $T_{w_2}$  есть одно-

временно температурой корня ребра, что позволяет найти распределение температуры по высоте ребра, используя зависимость (14.28).

Заметим еще раз, что оребрение целесообразно со стороны меньшего  $\alpha$ ; «наращивание» поверхности ребер эффективно до тех пор, пока  $\alpha_{\text{пр}} k_{\text{ор}}$  не станет равным  $\alpha_1$ . При этом достигается интенсификация теплопередачи, то есть через стенку проходит больший тепловой поток  $Q$  при заданном температурном напоре  $\Delta T_f = T_{f_1} - T_{f_2}$ . Однако если целью оребрения является снижение температуры стенки, то ребра необходимо размещать со стороны среды с меньшим значением  $T_f$ .

Стремясь к увеличению произведения  $\alpha_{\text{пр}} k_{\text{ор}}$ , следует учесть взаимосвязь  $k_{\text{ор}}$  и  $\alpha_{\text{пр}}$ . Коэффициент оребрения  $k_{\text{ор}}$  тем больше, чем выше ребра и больше их число; последнее обстоятельство заставляет делать ребра тонкими. Однако с уменьшением толщины ребра  $\delta_p$  и ростом его высоты  $h$  падает значение коэффициента эффективности ребра  $\eta$ , входящего множителем в соотношение (14.36) для приведенного коэффициента теплоотдачи  $\alpha_{\text{пр}}$ . Поэтому при выборе размеров ребра ориентируются на оптимальное сочетание величин  $h$  и  $\delta_p$ , обеспечивающее максимальное значение произведения  $\alpha_{\text{пр}} k_{\text{ор}} \leq \alpha_1$ .

Величина коэффициента  $\alpha_{\text{пр}}$  зависит и от расстояния между ребрами. При конвективной теплоотдаче это расстояние не должно быть меньше двух толщин динамического пограничного слоя, особенно при ламинарном режиме течения. Для излучающих ребер ориентируются на расстояние, при котором получаются приемлемые значения степени черноты системы с учетом переизлучения.

Проектируя оребрение, обращают внимание и на его массу. При выбранном расстоянии между ребрами и заданной их ширине масса определится соотношением высоты  $h$  и толщины  $\delta_p$  ребра, а также формой его сечения. Оптимальным будет такое сочетание этих факторов, которое обеспечит минимум массы ребра, отводящего заданный тепловой поток.

Технологически наиболее просты прямые ребра постоянной толщины. Для них условиями минимальной массы будут отношения

$$h/\sqrt{\delta_p} = \sqrt{\lambda/\alpha}$$

или

$$\delta_p / h^2 = 2,486 \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 T_0^3 / \lambda.$$

Первое условие соответствует конвективному теплоотводу, второе действительно для излучающих ребер (в нем  $T_0$  – температура корневого сечения; принято  $T_h = 0$ ).

Что касается формы сечения ребра, то минимум массы будет достигнут для сечения, обеспечивающего неизменность градиента температуры по высоте ребра. В случае прямых ребер такому требованию удовлетворяет контур сечения, образованный вогнутыми дугами (на практике контур принимают треугольным или трапециевидным с малым отношением толщин у вершины и основания сечения).

## 14.4. Нестационарная теплопроводность

### 14.4.1. Постановка задач и методы их решения

Ряд важных для объектов аэрокосмической техники задач теплопроводности не может быть рассмотрен в рамках предположения о неизменности параметров процесса во времени (например, задача о нагреве стенки сопла ракетного двигателя в режиме запуска). При решении нестационарных задач необходимо найти изменение температурного поля во времени и определить количество теплоты, отдаваемое или поглощаемое телом при его охлаждении или нагреве.

Задачи нестационарной теплопроводности можно разделить на две основные группы. К первой из них относятся задачи о теле, переходящем из некоторого начального теплового состояния в другое стационарное (чаще всего равновесное) состояние. Во вторую группу входят задачи о телах, температурные поля которых претерпевают периодические изменения (например, под влиянием внешнего воздействия).

Независимо от вида группы краевая задача нестационарной теплопроводности включает соответствующие дифференциальное уравнение и условия однозначности. В последние непременно входит начальное условие – распределение температуры в теле в нулевой момент времени:  $T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z)$ . Кроме того, величины, входящие в другие условия однозначности, могут изменяться во времени по заданному закону.

Для решения краевых задач нестационарной теплопроводности применяют как аналитические, так и численные методы. К числу первых относят, например, метод разделения переменных, метод источников, метод интегральных преобразований. Эти методы позволяют решать сравнительно простые задачи. Нестационарные температурные поля в телах сложной геометрической формы, как правило, рас-

считывают численными методами (например, методом конечных разностей).

#### 14.4.2. Охлаждение неограниченной плоской пластины

Рассмотрим задачу охлаждения неограниченной плоской изотропной пластины без внутренних источников теплоты при постоянных значениях плотности  $\rho$ , удельной теплоемкости  $C$  и коэффициента теплопроводности  $\lambda$ . В момент времени  $t = 0$  пластину с распределением температуры  $T(x, 0) = T_0(x)$  помещают в текучую среду с температурой  $T_f$ , после чего на обеих поверхностях пластины начинается отвод теплоты при постоянных во времени  $\alpha$  и  $T_f$ .

Отсчет температуры пластины будем вести от температуры среды, тогда уравнение Фурье – Кирхгофа (11.8) примет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (14.37)$$

где величина  $\vartheta = T - T_f$  представляет собой превышение температуры. В силу симметрии охлаждения начало оси  $X$  целесообразно разместить на середине толщины пластины. В этом случае граничными условиями являются соотношения  $(\partial \vartheta / \partial x)_{x=0} = 0$  и  $(\partial \vartheta / \partial x)_{x=\delta} = -(\alpha / \lambda) \vartheta_{x=\delta}$  (толщина пластины взята равной  $2\delta$ ). Начальное условие: при  $t = 0$  было  $\vartheta = \vartheta_0(x)$ , где  $\vartheta_0 = T_0 - T_f$ .

Решаем задачу методом Фурье, согласно которому вначале ищем частные решения  $\vartheta_n$  исходного уравнения, удовлетворяющие только граничным условиям. Затем, пользуясь линейностью уравнения, находим общее решение задачи как суперпозицию этих частных решений:

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \vartheta_n(x, t),$$

причем такую, которая удовлетворяет уже и начальным условиям за счет соответствующего выбора коэффициентов  $B_n$ .

Выполняя первый этап поиска решения, представим его в виде произведения двух функций, из которых одна является функцией только  $t$ , а другая – только  $X$ :

$$\vartheta = \vartheta(x, t) = \varphi(x)\psi(t).$$

Подставив его в уравнение (14.37), имеем

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \varphi(x) = a \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} \psi(t),$$

или после разделения переменных:

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = a \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Поскольку левая часть полученного уравнения зависит лишь от  $t$ , а правая – только от  $x$ , каждая из них должна быть равна некоторой константе. Исходя из физических соображений (тепловой процесс идет в направлении достижения равновесного состояния) эта константа должна быть отрицательной, так что

$$\frac{1}{a} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -k^2.$$

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение в частных производных сведено к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \varphi''(x) + k^2 \varphi(x) &= 0; \\ \psi'(t) + ak^2 \psi(t) &= 0. \end{aligned}$$

Решение первого из них имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx),$$

второго

$$\psi(t) = C_3 e^{-ak^2 t}.$$

В итоге получим частное решение

$$\vartheta = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)] C_3 e^{-ak^2 t}.$$

Граничное условие при  $x = 0$  дает  $C_1 = 0$ , поэтому

$$\vartheta = B e^{-ak^2 t} \cos(kx),$$

где  $B = C_2 C_3$ . Подчинив это уравнение граничному условию при  $x = \delta$ , получаем соотношение

$$\operatorname{ctg}(k\delta) = k\delta / (a\delta/\lambda),$$

или

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu}{a\delta/\lambda}.$$

Это характеристическое уравнение позволяет найти собственные значения, а следовательно, и собственные функции рассматриваемой задачи. Решая его графическим методом, получают бесконечное множество корней  $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n < \dots$ , соответствующее конкретному значению  $a\delta/\lambda$ . Значения  $\mu$  для разных  $a\delta/\lambda$  табулированы.

Каждому найденному значению  $\mu$  будет соответствовать свое частное решение:

$$\vartheta_n = B_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{at}{\delta^2}}.$$

В соответствии со сказанным выше, на втором этапе представляем общее решение бесконечным рядом

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{at}{\delta^2}},$$

коэффициенты которого ищем, исходя из начального условия. Для этого предварительно разложим известную функцию  $\vartheta_0(x)$  в ряд по

собственным функциям  $\cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right)$ :

$$\vartheta_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right).$$

Далее приравниваем коэффициенты при собственных функциях одного порядка (с одинаковым значением  $n$ ). Заметим, что для этого функция  $\vartheta_0 = (x)$  должна допускать разложение в ряд Фурье.

В итоге получаем температурное поле вида

$$\begin{aligned} \vartheta = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\delta(\mu_n + \cos\mu_n \sin\mu_n)} \left[ \int_{-\delta}^{+\delta} \vartheta_0(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx \right] \times \\ \times \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{at}{\delta^2}}. \end{aligned} \quad (14.38)$$

Поскольку время  $t$  входит только в показатель степени при числе  $e$ , зависимость  $\vartheta(t)$  носит экспоненциальный характер.

### 14.4.3. Безразмерная форма решений

Предшествующее рассмотрение показывает, что даже в простейшем случае расчет нестационарного поля температуры весьма трудоемок. Однако результаты решения некоторых простых, но важных для практики задач (пластина, цилиндр, шар) можно представить в безразмерной форме в виде номограмм или таблиц, что облегчает их использование.

Продемонстрируем возможность такого представления для полученного выше решения задачи нестационарной теплопроводности плоской неограниченной пластины. Для простоты возьмем случай, когда в нулевой момент времени температура в пластине распределена равномерно:  $\vartheta_0 = \text{const}$ . В этом случае итоговое уравнение температурного поля выглядит так:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{at}{\delta^2}}. \quad (14.39)$$

Заметим, что в этом уравнении собственные числа  $\mu_n$  (корни характеристического уравнения) и, следовательно, выражения

$$2 \sin \mu_n / (\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n) = D_n$$

являются функциями только безразмерного комплекса  $a\delta/\lambda = \text{Bi}$ , называемого *числом Био*. Отношение  $x/\delta = X$  и комплекс  $at/\delta^2 = \text{Fo}$  (*число Фурье*) здесь также безразмерны. Поэтому после деления  $\vartheta$  на  $\vartheta_0$  уравнение температурного поля становится безразмерным:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \theta = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}}. \quad (14.40)$$

Исследования показали, что при  $\text{Fo} \geq 0,3$  этот ряд столь быстро сходится, что распределение температуры достаточно точно описывается его первым членом. Поэтому в случае  $\text{Fo} \geq 0,3$  можно записать:

$$\theta = D_1 \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo),$$

или

$$\theta_x = f_x(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (14.41)$$

Как видно, при заданной координате  $X$  безразмерная температура  $\theta$  является функцией только двух безразмерных комплексов:

$$\theta_x = \theta_x(Bi, Fo). \quad (14.42)$$

После табулирования эта функция для заданных координат (например, для оси и поверхности пластины) достаточно просто представляется в координатах  $\ln \theta$  и  $Fo$ , если принять  $Bi$  в качестве параметра семейства.

Выясним смысл безразмерных комплексов  $Bi$  и  $Fo$ . Представим число Био  $Bi = a\delta/\lambda$  как отношение термических сопротивлений теплопроводности  $\delta/\lambda$  и теплоотдачи  $1/\alpha$  («внутреннего» и «внешнего» термических сопротивлений пластины). По этой причине число Био рассматривают как *критерий теплового подобия*, безразмерно характеризующий граничные условия третьего рода.

Заметим, что критерий Био  $Bi$  формально совпадает с числом Нуссельта  $Nu$  (см. подразд. 12.2.1). Однако на самом деле они существенно отличаются друг от друга.

Действительно, число  $Nu$  является критерием подобия процессов конвективного теплообмена, при исследовании которых коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  есть искомая величина. Тем самым число Нуссельта представляет собой определяемый критерий в отличие от числа Био, определяющего характер процесса нестационарной теплопроводности в твердом теле (здесь величина  $\alpha$  задана).

Кроме того, в критериях Нуссельта и Био характерный линейный размер  $\delta$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda$  соответствуют разным областям теплопереноса: текучей среде в первом случае и твердому телу во втором. Поэтому физический смысл чисел  $Nu$  и  $Bi$  неодинаков: критерий Нуссельта характеризует интенсификацию теплоотдачи за счет конвекции среды (см. подразд. 12.2.1), а критерий Био, как сказано выше, отражает влияние теплоотдачи на процесс изменения температуры в твердом теле.

Число Фурье  $Fo = at/\delta^2$  можно представить как отношение текущего времени  $t$  ко времени перестройки температурного поля в теле  $\delta^2/a$ . Ввиду этого число  $Fo$  рассматривают как *критерий теплового подобия*, характеризующий протекание нестационарного процесса распространения теплоты в теле (определяющий критерий тепловой гомохронности).

Из решения задачи для случая  $\vartheta_0 = \text{const}$  следует, что при заданных граничных условиях в любой момент времени ( $Fo > 0$ ) распределение температуры в пластине представлено симметричной кривой с максимумом на «оси» пластины (рис. 14.3). Можно показать, что для любого момента времени касательные к кривым в точках  $X = \pm 1$ , соответствующих поверхности пластины, проходят через два направляющих полюса, которые удалены от этих точек на расстояния  $l_{\Pi} = 1/Bi$ . Иначе говоря, вид температурных кривых и его изменение с течением времени зависят от значения числа Био.

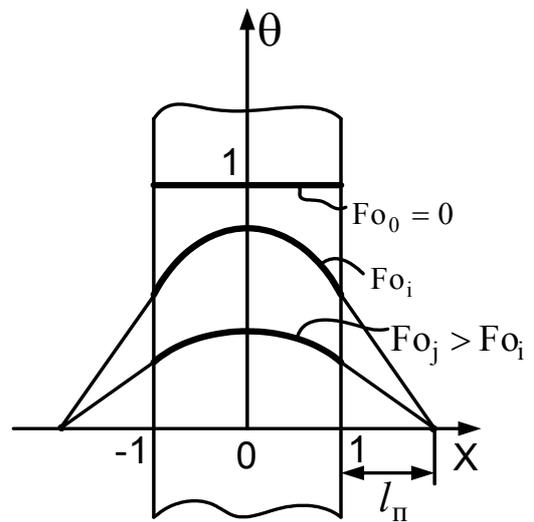


Рис. 14.3

Рассмотрим предельные случаи  $Bi \rightarrow \infty$  и  $Bi \rightarrow 0$ . В первом из них вследствие ничтожно малых значений внешнего термического

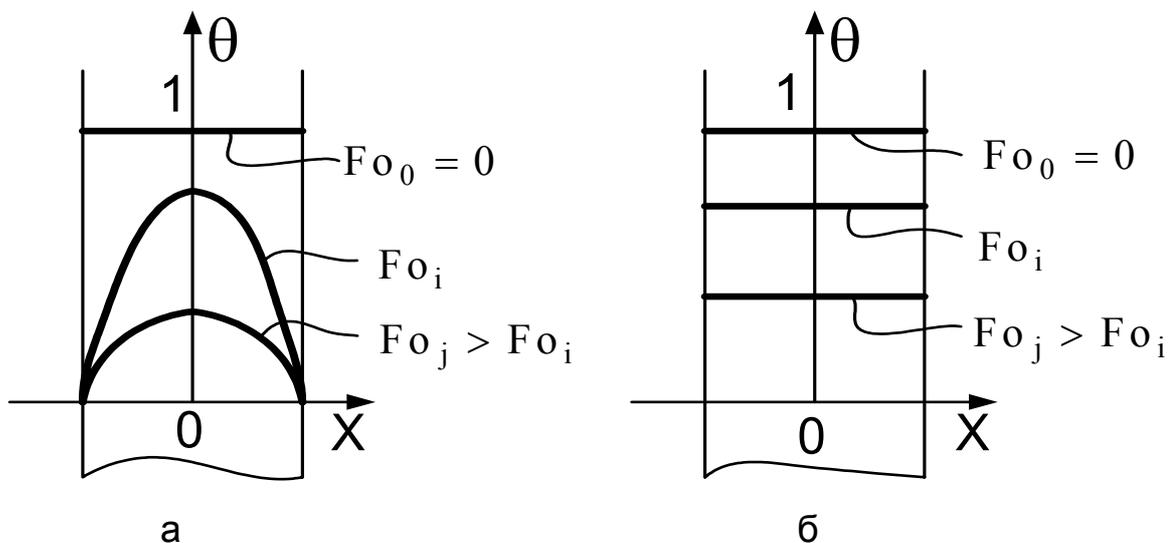


Рис. 14.4

сопротивления  $1/\alpha$  температура поверхности пластины практически сразу становится равной  $T_f$ , а направляющие полюса переходят на эту поверхность (рис. 14.4, а). Для такого случая кривизна температурных линий постепенно уменьшается по мере роста числа Фурье (увеличения времени).

При  $Bi \rightarrow 0$  полюса «уходят» на бесконечность, так что для любого момента времени линия  $\theta$  является почти прямой, параллельной оси  $X$  (рис. 14.4, б). С увеличением  $Fo$  эти линии перемещают-

ся; их положение соответствует значениям температуры от  $\theta_0 = 1$  до  $\theta_\infty = 0$ .

#### 14.4.4. Регулярный режим охлаждения тел

Для тел, отличных от пластины, уравнение температурного поля имеет структуру, аналогичную полученной выше: оно представляет собой сумму бесконечного ряда, члены которого расположены по быстро убывающим экспоненциальным функциям:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} B_n U_n e^{-m_n t}. \quad (14.43)$$

Здесь множители  $B_n$  и  $U_n$  учитывают геометрию тела, причем  $B_n$  зависит еще и от начальных условий.

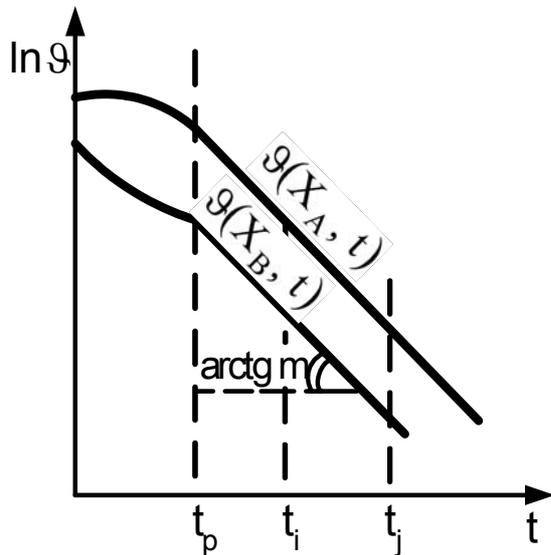


Рис. 14.5

Последняя зависимость существенна лишь в случае малых значений  $t$  ( $0 < t < t_p$ ); при этом поле температуры в теле определяется несколькими членами ряда (неупорядоченная стадия процесса). С увеличением  $t$  ряд сходится настолько быстро, что, начиная с некоторого значения  $t = t_p$ , температурное поле достаточно хорошо описывается первым членом ряда. Поскольку коэффициент  $B_1$  хотя и определяется из начальных условий, но не зависит от координат

(постоянен для всех точек тела), то при  $t > t_p$  начальное тепловое состояние тела уже не оказывает влияния на закон изменения температуры по времени (рис. 14.5).

Этой второй стадии процесса, называемой *регулярным режимом*, для всех точек тела отвечает зависимость

$$\ln \vartheta = -mt + C(x, y, z), \quad (14.44)$$

где

$$m = -\frac{d \ln \vartheta}{dt} = -\frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \quad (14.45)$$

есть *температурный темп охлаждения* (относительная скорость падения температуры). Его легко определить опытным путем (рис. 14.5):

$$m = (\ln \vartheta_i - \ln \vartheta_j) / (t_j - t_i).$$

Можно показать, что темп охлаждения пропорционален коэффициенту теплоотдачи, площади поверхности тела и обратно пропорционален его теплоемкости (*первая теорема Кондратьева*). Коэффициент пропорциональности равен отношению средней температуры поверхности тела  $\overline{\vartheta}_F$  к средней температуре всего тела  $\overline{\vartheta}_V$  (при  $Bi < 0,1$  он близок к единице). В случае  $\alpha \rightarrow \infty$ , или  $Bi \rightarrow \infty$ , темп охлаждения становится прямо пропорциональным коэффициенту температуропроводности тела (*вторая теорема Кондратьева*). При этом коэффициент пропорциональности зависит только от формы и размеров тела; например, для безграничной пластины он равен  $(\pi/2\delta)^{-2}$ .

## 14.5. Методы решения задач тепловой защиты

### 14.5.1. Виды тепловой защиты

Важной целью теплофизического проектирования объектов аэрокосмической техники является защита «стенки» конструкции от воздействия высокотемпературного газового тока. Примерами такой стенки могут быть жаровые трубы камеры сгорания газотурбинного двигателя, камера ракетного двигателя, лобовая часть оболочки спускаемого космического летательного аппарата. Упомянутую *тепловую защиту* обеспечивают посредством *защитных покрытий* (жаростойких или уносимых) и *конвективного теплоотвода* (охлаждение жидкостное, пористое, пленочное, заградительное). Кроме того, заданного теплового состояния стенки можно достичь за счет использования ее *теплоемкости* (емкостная тепловая защита).

Для последней характерен нестационарный режим работы: по мере отвода теплоты в стенку происходит ее прогрев. Стенка сохраняет работоспособность до тех пор, пока температура на поверхности контакта ее с газом не превысит предельно допустимого значения. В ряде случаев критерием работоспособности может быть заданная температура «внутренней» поверхности стенки. Расчет емкостной тепловой защиты ведут по формулам нестационарной теплопроводности. Понятно, что для эффективной работы такая стенка должна иметь большую массу, а ее материал – высокую теплоемкость.

*Жаростойкое покрытие* можно применить как в нестационарных условиях нагрева (при емкостном теплоотводе в основную стенку), так и в стационарных (в системах с конвективным охлаждением защищаемой стенки с другой стороны).

В обоих случаях нанесение жаростойкого покрытия приводит к уменьшению температуры защищаемой стенки за счет дополнительного перепада температуры на слое покрытия. Наличие покрытия дает возможность повысить температуру поверхности контакта конструкции с газом, что снижает тепловой поток, поступающий в стенку. Дополнительным положительным обстоятельством здесь является уменьшение температурных напряжений в основной стенке ввиду снижения  $grad T$  в ней.

Понятно, что для достижения поставленных перед покрытием целей материал его должен иметь малые коэффициенты теплопроводности (при работе в стационарном режиме) и температуропроводности (если условия работы нестационарные). Непременные требования – высокие термостойкость и термпрочность, способность противостоять большим термическим напряжениям. Обычно жаростойкие покрытия изготавливают из тугоплавких металлов, графита, металлокерамики.

Температурное состояние стенки с защитным жаростойким покрытием в стационарных условиях определяют, решая соответствующие задачи теплопередачи (см. подразд. 14.1). В случае нестационарных режимов даже упрощенные аналитические методики расчета изменения во времени температуры поверхности соприкосновения стенки с покрытием ( $T_{стП}$ ) крайне сложны. Для практических целей вполне пригодна приближенная аппроксимация соответствующих решений в виде зависимости

$$\lg \frac{T_{г} - T_{стП}}{T_{г} - (T_{стП})_0} = 0,0212 - \frac{0,45}{\mu + 0,4} Fo, \quad (14.46)$$

где  $\mu = 1/Bi + 1/K + 1/(KBi)$ ;  $T_{г}$  – температура газа;  $(T_{стП})_0$  – температура упомянутой поверхности в начальный момент времени. Критерии Био и Фурье здесь находят по характеристикам покрытия, а величина  $K$  представляет собой отношение теплоемкостей защитного слоя и основной стенки:  $K = (\rho c \delta)_{п} / (\rho c \delta)_{ст}$ .

Подчеркнем, что жаростойкие покрытия за все время своей работы не меняют размеров и формы, поэтому они применимы для защиты таких элементов, как горловина камеры ракетного двигателя.

В отличие от жаростойких *уносимые покрытия* разрушаются в процессе взаимодействия с высокотемпературным газовым потоком. При нагреве уносимого теплозащитного покрытия его поверхность может оплавляться (с последующим испарением или без него), сублимировать (переходить непосредственно из твердой фазы в газообразную), гореть (вступать в химическую реакцию с газовым потоком), разлагаться под действием высокой температуры. Совокупность всех

процессов, происходящих на поверхности разрушающегося покрытия, называют *абляцией*. Основным смысл нанесения аблирующих покрытий – поглощение ими большого количества теплоты на осуществление фазовых и химических превращений. Кроме того, поступление газообразных продуктов абляции в пограничный слой основного потока уменьшает тепловой поток, идущий к стенке.

Задача о расчете распределения температуры в уносимом теплозащитном покрытии представляет собой разновидность задачи Стефана (теплопроводность при подвижной границе системы); ее решение рассмотрено далее (см. подразд. 14.5.2).

Конвективный теплоотвод обеспечивает стационарный режим работы защищаемой стенки. Простейший вид такой тепловой защиты – *жидкостное охлаждение* «внутренней» поверхности стенки (противоположной той поверхности, которая омывается горячим газовым потоком). При заданных температуре газа  $T_{\Gamma}$  и условиях его теплообмена со стенкой температурное состояние последней зависит от температуры охладителя  $T_{\text{охл}}$ , а также интенсивности теплоотдачи на внутренней поверхности. Чтобы подогрев жидкости не был чрезмерным, теплоемкость ее должна быть высокой. Расчет жидкостного охлаждения ведут по изложенным ранее соотношениям теплопередачи (см. подразд. 14.1.2, 14.1.3) и конвективного теплообмена (см. подразд. 12.3.3, 12.3.5). Такое охлаждение широко используют в жидкостных ракетных двигателях: здесь горючее подают в зазор между корпусом камеры и ее рубашкой.

Более эффективным видом конвективного теплоотвода является *испарительное охлаждение*, когда отводимая от стенки теплота расходуется не только на прогрев жидкости, но и на кипение ее. При этом достигают высоких значений коэффициента теплоотдачи на «внутренней» стороне стенки. Проектируя такие системы охлаждения, основное внимание обращают на теплоту испарения хладагента. Из обычных жидкостей наибольшей теплотой парообразования  $r$  обладает вода: при атмосферном давлении у нее  $r = 2260 \text{ кДж/кг}$ . В случае высокой температуры стенки для охлаждения можно применить жидкие металлы, имеющие на порядок большие значения  $r$ ; например, у лития  $r = 20500 \text{ кДж/кг}$ .

К системам конвективной тепловой защиты относится и *пористое охлаждение*, при котором через стенку с проницаемыми порами в направлении горячего газа «продавливают» охладитель (газ или жидкость). В первом случае охлаждение называют эффузионным, во втором – конденсатным. Проходя через поры, охладитель «отбирает» теплоту от стенки, а выйдя на поверхность ее, препятствует теплообмену между горячим газовым потоком и стенкой. Оба эти фактора ведут к снижению температуры стенки. Особо отметим, что при порис-

том охлаждении «попавшая» в защищаемую стенку теплота «выносятся» охладителем обратно в поток газа.

Расчет пористого охлаждения сводится обычно к определению поля температуры в стенке (см. подразд. 14.5.3). По расходу охладителя на единицу площади защищаемой поверхности пористое охлаждение наиболее эффективно из всех видов конвективной тепловой защиты. Однако при этом необходимы технологически сложная пористая стенка и чистый хладагент, не дающий осадка в процессе нагрева и кипения.

Более простым является *пленочное охлаждение*, при котором защищаемую поверхность покрывают пленкой жидкости, подаваемой через щели в стенке. Протекая вдоль поверхности, жидкая пленка испаряется; прослойка жидкости и образующийся пар «оттесняют» горячий газ от защищаемой поверхности. Это ведет к уменьшению температуры стенки, снижается и тепловой поток к ней.

В случае больших размеров защищаемой поверхности приходится выполнять в стенке несколько щелей; увеличение их количества «выравнивает» температурное поле. Понятно, что при увеличении расхода жидкости через щель  $\dot{m}_{\text{охл}}$  можно увеличить расстояние между щелями, однако расход не должен превышать значения, после достижения которого пленка отделяется от охлаждаемой поверхности. Это значение зависит от скорости газового потока, ширины щели, угла наклона ее (при углах менее  $15^\circ$  пленка всегда примыкает к стенке). Выбирая величину расхода, надо также следить за тем, чтобы число Рейнольдса для пленки  $Re_{\text{пл}} = W_{\text{в}} \delta_{\text{щ}} / \nu_{\text{охл}}$ , подсчитанное по скорости выхода охладителя  $W_{\text{в}}$  и ширине щели  $\delta_{\text{щ}}$ , не превысило величины, при которой пленка теряет устойчивость (это приводит к уносу капель жидкости газовым потоком).

Тепловой баланс при пленочном охлаждении характеризуют зависимостью

$$\frac{\alpha}{C_{p_w}} (I_{\text{г}} - I_{\text{w}}) l t = \dot{m}_{\text{охл}} (c \Delta T_{\text{охл}} + r), \quad (14.47)$$

позволяющей найти расстояние между щелями  $t$ , размещенными на защищаемой поверхности шириной  $l$ . Здесь  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от газа к стенке;  $C_{p_w}$  – изобарная теплоемкость газа при температуре поверхности стенки;  $I_{\text{w}}$  и  $I_{\text{г}}$  – полные энтальпии газа при температурах поверхности стенки и восстановления (см. подразд. 12.3.5);  $c$  и  $r$  – теплоемкость и теплота парообразования охладителя;  $\Delta T_{\text{охл}}$  – разность температур насыщения охладителя и выхода его из щели.

Если на защищаемую поверхность подавать через щели не жидкость, а газ, то такой вид охлаждения называют *заградительным*. Вдув газа в пограничный слой основного (горячего) потока уменьшает его температуру и увеличивает толщину погранслоя. В итоге снижается тепловой поток, подводимый к защищаемой стенке, и падает ее температура.

Чаще всего системы заградительного охлаждения проектируют так, чтобы «защитный» газ подавался по касательной к поверхности стенки, а расход его обеспечивал отсутствие нормального к стенке градиента температуры в пограничном слое. Формально это означает полную теплоизоляцию стенки, хотя в действительности температура ее нарастает по длине из-за прогрева защитного газа вдоль потока в процессе смешивания его с горячим газом.

Мерой эффективности заградительного охлаждения в таком случае является отношение  $\bar{\theta} = (T_{\Gamma}^0 - T_w) / (T_{\Gamma}^0 - T_{w_e})$ , где  $T_{\Gamma}^0$  – полная температура основного потока;  $T_w$  и  $T_{w_e}$  – температура поверхности стенки в рассматриваемом сечении и в месте вдува защитного газа.

Если свойства основного и защитного газа отличаются мало, то при турбулентном течении в погранслое расчет  $\bar{\theta}$  ведут по зависимости

$$\bar{\theta} = \left[ 1 + 0,24 \text{Re}_c^{-1/4} \frac{W_{\Gamma} (X - X_0)}{W_B \delta_{\text{щ}}} \right]^{-0,8}, \quad (14.48)$$

справедливой для  $W_{\Gamma} X / (W_B \delta_{\text{щ}}) > 60$ . Здесь  $W_{\Gamma}$  – скорость горячего газа, координата  $X$  соответствует основному участку струи защитного газа, число Рейнольдса струи  $\text{Re}_c = W_B \delta_{\text{щ}} / \nu$  подсчитано по скорости вдува  $W_B$  и ширине щели  $\delta_{\text{щ}}$ . Длину  $X_0$  начального участка струи защитного газа, на котором в струе сохраняется ядро с постоянной скоростью  $W_B$ , рекомендуют искать по формуле

$$\frac{X_0}{\delta_{\text{щ}}} = \left( 0,107 + 0,037 \frac{W_B}{W_{\Gamma}} \right)^{-1} \frac{W_{\Gamma} + W_B}{W_{\Gamma} - W_B}, \quad (14.49)$$

следующей из теории свободных спутных струй при  $W_B < W_{\Gamma}$ .

### 14.5.2. Задача Стефана для аблирующего покрытия

В неподвижной системе координат задача о температурном поле такого покрытия является нестационарной. Если внешняя (аблирую-

щая) поверхность в ходе уноса вещества распространяется внутрь покрытия с постоянной скоростью  $W_a$ , то задачу можно свести к квазистационарной посредством введения подвижной системы координат, связанной с аблирующей поверхностью.

Рассмотрим такой прием на примере одномерной задачи для полупространства. Пусть к начальному моменту времени ( $t = 0$ ) тело (покрытие), располагавшееся в полупространстве  $x \geq 0$ , достигло у поверхности температуры абляции  $T_w = T_a = \text{const}$ . Иначе говоря, при  $t = 0$  начался унос вещества с поверхности, характеризуемый плотностью потока массы  $\dot{m}_A/A$  кг/(м<sup>2</sup> · с), где  $\dot{m}_A$  – массовый расход аблирующего вещества с площади  $A$ . Принимаем  $\dot{m}_A = \text{const}$ , то есть считаем неизменной скорость движения границы тела  $w_a = \dot{m}_A/\rho_{II}A$ . Если еще допустить, что абляция идет в слое, толщина которого пренебрежимо мала по сравнению с толщиной всего покрытия, то поле температуры для произвольного момента времени  $t > 0$ , согласно формуле (11.8), определится уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_{II} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (14.50)$$

где коэффициент температуропроводности покрытия  $a_{II} = \lambda_{II}/(\rho_{II}c_{II})$  неизменен (здесь  $\lambda_{II}$ ,  $\rho_{II}$ ,  $c_{II}$  – теплопроводность, плотность и теплоемкость материала покрытия). Начальное распределение температуры задается решением задачи о прогреве тела с неподвижной границей до достижения поверхностью  $x = 0$  температуры  $T_w = T_a$ . При этом  $T(x \rightarrow \infty) = T_0$  и, начиная с  $t = 0$ , имеем  $T(x_a, t) = T_w = T_a$ , где  $x_a = w_a t$ .

Для перехода к квазистационарной задаче вводим новую систему координат, начало которой всегда находится на подвижной поверхности тела. В этой системе пространственная координата  $\xi = x - w_a t$ , а отсчет времени таков же, как в старой системе  $(x, t)$ . С учетом этого после замены переменных уравнение Фурье – Кирхгофа (14.50) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dT}{d\xi} = -\frac{a_{II}}{w_a} \frac{d^2 T}{d\xi^2}, \quad (14.51)$$

для которого  $T(0) = T_a$ ,  $T(\infty) = T_0$ .

Решение уравнения (14.51) имеет вид

$$T(\xi) = -C_1 \frac{a_{\Pi}}{W_a} e^{-\frac{W_a \xi}{a_{\Pi}}} + C_2.$$

Константы интегрирования находим из граничных условий: согласно второму условию имеем  $C_2 = T_0$ , а из первого следует  $C_1 = (T_0 - T_a)W_a / a_{\Pi}$ . Следовательно, избыточная относительная температура в полупространстве (справа от поверхности  $X = W_a t$ ) равна

$$\frac{T(\xi) - T_0}{T_a - T_0} = e^{-\frac{W_a \xi}{a_{\Pi}}}. \quad (14.52)$$

Нестационарное распределение температуры в исходной системе координат  $(x, t)$  можно получить, перейдя от  $\xi$  к  $X, t$  в этом выражении.

Уравнение (14.52) позволяет найти тепловой поток, отводимый внутрь стенки. Согласно закону Фурье (11.5), имеем

$$q_{\text{вн}} = -\lambda_{\Pi} (dT/d\xi)_{\xi=0} = \lambda_{\Pi} (T_a - T_0)W_a / a_{\Pi}.$$

Скорость перемещения аблирующей поверхности вглубь покрытия  $W_a$  ищут, опираясь на уравнение теплового баланса  $q_{\Gamma} = q_a + q_{\text{и}} + q_{\text{вн}}$ , где  $q_{\Gamma}$ ,  $q_a$ ,  $q_{\text{и}}$  – плотности тепловых потоков: подводимого от горячего газа, «уносимого» продуктами абляции, излучаемого поверхностью покрытия. С учетом выражений

$$q_{\Gamma} = \alpha(I_{\Gamma} - I_a) / c_{pa};$$

$$q_a = r_a \dot{m}_A / A = r_a \rho_{\Pi} W_a;$$

$$q_{\text{и}} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_a^4 - T_{\Gamma}^4);$$

$$q_{\text{вн}} = \rho_{\Pi} W_a c_{\Pi} (T_a - T_0)$$

имеем

$$W_a = \frac{\alpha(I_{\Gamma} - I_a) / c_{pa} - \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_a^4 - T_{\Gamma}^4)}{\rho_{\Pi} [r_a + c_{\Pi} (T_a - T_0)]}. \quad (14.53)$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от горячего газа, имеющего температуру  $T_{\Gamma}$ , к аблирующей поверхности с температурой  $T_a$ ;  $I_a$

и  $I_r$  – полные энтальпии газа при температурах абляции  $T_a$  и восстановления  $T_r$  (см. подразд. 12.3.5);  $c_{p_a}$  – изобарная теплоемкость газа при  $T_a$ ;  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенная степень черноты системы «аблирующая поверхность – горячий газ»;  $\sigma_0$  – постоянная Стефана – Больцмана;  $r_a$  – удельная теплота абляции (ее поглощает единица массы унесенного вещества).

Величина  $r_a$  выражает свойство уносимого покрытия поглощать теплоту в процессе его разрушения, но не учитывает защитного эффекта, обусловленного выходом газообразных или парообразных продуктов абляции в пограничный слой горячего газа. Поэтому для сравнительной оценки различных покрытий лучше использовать *эффективную теплоту абляции*  $r_{\text{эф}} = (q_0 - q_{\text{и}} - q_{\text{вн}}) / (\rho_{\text{п}} w_a)$ , где  $q_0$  – плотность теплового потока от горячего газа к поверхности, находящейся при температуре  $T_a$ , но в условиях, когда абляции нет.

Впрочем, сравнивать уносимые покрытия надо не только по значению  $r_{\text{эф}}$ , но и по величине  $\lambda_{\text{п}}$ . Действительно, при большом  $\lambda_{\text{п}}$  происходит быстрый разогрев всего покрытия и защищаемой конструкции, так что покрытие не выполняет своей роли.

Следует отметить, что в зависимости (14.53) коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  надо определять с учетом воздействия продуктов разрушения покрытия на погранслои горячего газа (см. подразд. 14.5.4). Массовый поток газообразных или парообразных продуктов  $\dot{m}'_A = \varphi \dot{m}_A$ , поступающий с поверхности площадью  $A$ , зависит от степени «газификации»  $\varphi$ . Последняя равна отношению потока упомянутых продуктов к общему расходу вещества уносимого покрытия.

Если покрытие в ходе взаимодействия с горячим газом сублимирует, то  $\varphi = 1$ , а  $r_a$  равна теплоте сублимации. В случае химического характера взаимодействия значения  $\varphi$  и  $r_a$  определяют с учетом скорости реакции горения или разложения и теплоты этой реакции. При использовании оплавляющихся покрытий  $\varphi = 0$ , поэтому  $\alpha$  находят по обычным критериальным уравнениям конвективного теплообмена (см. подразд. 12.3.5). Температура свободной поверхности пленки расплава  $T_a$  зависит от температуры плавления, теплового потока  $q_{\text{вн}}$ , теплопроводности пленки, ее толщины и условий движения пленки, определяемых числом Рейнольдса  $Re_{\text{пл}}$ . Под теплотой

абляции здесь понимают сумму теплоты плавления и увеличения энтальпии пленки до момента «сдува» ее с покрытия горячим газовым потоком. В случае испаряющихся пленок к упомянутой сумме добавляют теплоту испарения, значение  $T_a$  принимают равным температуре насыщения, а величину  $\alpha$  определяют с учетом выхода пара в погранслое основного потока.

### 14.5.3. Распределение температуры в стенке с пористым охлаждением

Поставленную задачу рассмотрим для случая конденсатного охлаждения (см. подразд. 14.5.1) неограниченной плоской стенки при условии, что температура горячей поверхности стенки равна температуре насыщения. Это условие означает, что расход конденсата (охлаждающей жидкости) взят таким, что кипение его внутри стенки не наблюдается (в обычных пористых структурах оно может быть неустойчивым), но и недогрев конденсата на горячей поверхности не предусмотрен (чтобы не было уноса части пленки без ее испарения).

Ввиду больших значений коэффициента теплоотдачи внутри стенки при конденсатном охлаждении можно принять, что температура жидкости становится равной температуре стенки сразу при входе ее, то есть температурные поля стенки и охладителя совпадают (рис. 14.6). Поскольку величина коэффициента теплопроводности материала пористой стенки (металлического «скелета» ее)  $\lambda_c$  на порядок и более превышает значение этого коэффициента для охлаждающей жидкости  $\lambda_{\text{охл}}$ , далее считаем, что теплота в пористой стенке передается только по скелету. Допустим еще пренебрежимо малый вклад конвекции в теплообмен между жидкостью и стенкой на «холодной» поверхности ее (подходящий к этой поверхности охладитель получает теплоту только посредством теплопроводности).

Анализ условий задачи позволяет рассматривать теплоту, которую «поглощает» охладитель, находящийся в порах, как равномерно размещенные в стенке стоки теплоты с объемной плотностью  $q_v = \dot{m}_A c_{\text{охл}} dT / (A dx)$ . Здесь  $\dot{m}_A$  – секундный массовый расход охладителя, приходящийся на площадь  $A$  поверхности защищаемой стенки,  $c_{\text{охл}}$  – удельная теплоемкость охладителя. Соответ-

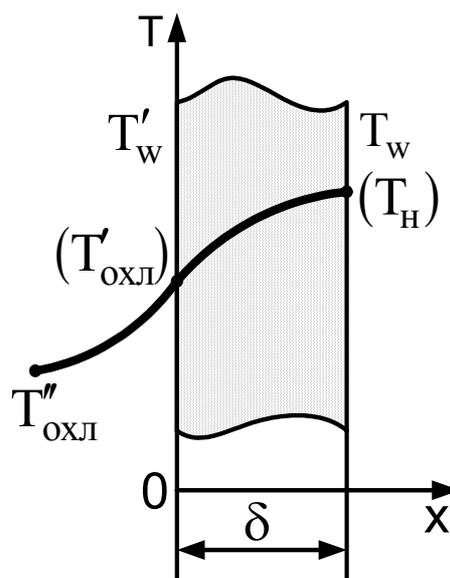


Рис. 14.6

ственно, поле температуры в стенке будет отвечать уравнению Пуассона

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{q_v}{\lambda} = 0,$$

или

$$\frac{d^2T}{dx^2} - B \frac{dT}{dx} = 0, \quad (14.54)$$

где  $B = \dot{m}_A c_{\text{охл}} / (A\lambda)$ , причем под  $\lambda$  здесь следует понимать эффективную теплопроводность  $\lambda = \lambda_c (1 - \Pi)$ , где  $\Pi$  - пористость стенки (отношение объема пор ко всему объему стенки).

Решение уравнения (14.54) имеет вид

$$T = C_1 e^{Bx} + C_2.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем из граничных условий:  $T = T'_w$  при  $x = 0$  и  $T = T_w = T_H$  при  $x = \delta$  (здесь  $T_H$  - температура насыщения охладителя). Граничные условия дают:  $T'_w = C_1 + C_2$ ;  $T_H = C_1 e^{B\delta} + C_2$ , откуда  $C_1 = (T'_w - T_H) / (1 - e^{B\delta})$ ;  $C_2 = T'_w - (T'_w - T_H) / (1 - e^{B\delta})$ . Тогда температурное поле в пористой стенке выглядит так:

$$T = T'_w - (T'_w - T_H) \frac{1 - e^{Bx}}{1 - e^{B\delta}}.$$

Недостаток этого выражения - присутствие в нем неизвестной температуры поверхности стенки  $T'_w$  (со стороны подачи охладителя). Ее можно исключить, записав уравнение поля температуры охлаждающей жидкости  $T_{\text{охл}}$  при  $-\infty \leq x \leq 0$  и учтя граничные условия здесь: для  $x = -\infty$  имеем  $T = T''_{\text{охл}}$ , а при  $x = 0$  будет  $T'_{\text{охл}} = T'_w$  и  $\lambda_{\text{охл}} dT_{\text{охл}}/dx = \lambda dT/dx$ , где  $T$  отвечает записанному выше выражению. В итоге получаем:

$$\frac{T - T''_{\text{охл}}}{T_H - T''_{\text{охл}}} = e^{-B\delta(1-x/\delta)}. \quad (14.55)$$

Если на обеих поверхностях стенки заданы граничные условия третьего рода, то распределение температуры в стенке описывается зависимостью

$$\frac{T - T_{\text{гy}}}{T''_{\text{охл}} - T_{\text{гy}}} = \frac{1 + B_{\text{г}} - e^{-Bx}}{(1 + B_{\text{г}}) - (1 - B_{\text{охл}})e^{-B\delta}}. \quad (14.56)$$

Здесь комплексы  $B_{\text{г}}$  и  $B_{\text{охл}}$  имеют вид:  $B_{\text{г}} = \dot{m}_A c_{\text{охл}} / (A \alpha_{\text{г}})$ ,  $B_{\text{охл}} = \dot{m}_A c_{\text{охл}} / (A \alpha_{\text{охл}})$ , а условная температура газа  $T_{\text{гy}}$  введена как  $T_{\text{гy}} = T_{\text{г}} - B_{\text{г}} r_{\text{охл}} / c_{\text{охл}}$ , причем  $\alpha_{\text{г}}$  и  $\alpha_{\text{охл}}$  – коэффициент теплоотдачи со стороны газа и со стороны охладителя,  $r_{\text{охл}}$  – теплота парообразования охлаждающей жидкости.

Необходимую для расчетов по выражениям (14.55) и (14.56) плотность расхода охладителя  $\dot{m}_A / A$  находят из уравнения теплового баланса:

$$\dot{m}_A / A = \frac{\alpha_{\text{г}} (I_{\text{г}} - I_{\text{н}}) / c_{\text{pн}}}{c_{\text{охл}} (T_{\text{н}} - T''_{\text{охл}}) + r_{\text{охл}}}, \quad (14.57)$$

где  $I_{\text{н}}$  и  $I_{\text{г}}$  – полные энтальпии горячего газа при температурах насыщения  $T_{\text{н}}$  и восстановления  $T_{\text{г}}$  (см. подразд. 12.3.5);  $c_{\text{pн}}$  – изобарная теплоемкость газа при  $T_{\text{н}}$ . Записанная формула отвечает случаю, когда излучение в системе «пористая стенка – горячий газ» можно не учитывать.

#### 14.5.4. Особенности теплоотдачи при поступлении защитного газа (пара) в основной поток

В подразд. 14.5.1 отмечалось, что в системах тепловой защиты с применением аблирующих покрытий, а также пористого, пленочного и заградительного охлаждения существенно изменяются условия теплоотдачи от основного потока горячего газа к защищаемой поверхности. Продукты разрушения покрытия, образующийся при испарении жидкой пленки пар, подаваемый через поры и щели защитный газ увеличивают толщину пограничного слоя основного потока и уменьшают скорость его возле стенки, а в ряде случаев изменяют даже саму структуру погранслоя. В частности, «поперечный вдув» способствует потере устойчивости ламинарного пограничного слоя, но в турбулентном погранслое он снижает интенсивность турбулентных пульсаций в зоне, непосредственно примыкающей к поверхности. Кроме того, вдув уменьшает коэффициент восстановления температуры горячего потока газа (см. подразд. 12.3.5), что также сказывается на теплоотдаче.

Анализ системы уравнений неразрывности, движения, энергии, теплоотдачи и массоотдачи методами теории подобия показывает, что в рассматриваемых условиях конвективный теплообмен определяется не только введенными в подразд. 12.2.1 критериями, но и дополнительными безразмерными переменными. Таковыми являются отношения плотностей потоков массы  $\rho W$ , молекулярных масс  $\mu$  и теплоемкостей  $c_p$  «вдуваемого газа» (индекс «в») и основного потока горячего газа (индекс «г»). Поскольку теплоемкость зависит от молекулярной массы, часто применяют только комплекс  $\rho_B W_B / \rho_G W_G$  и симплекс  $\mu_B / \mu_G$ . Коэффициент теплоотдачи падает с ростом первого отношения и уменьшением второго. Для ламинарного погранслоя вместо величины  $\rho_B W_B / \rho_G W_G$  используют произведение ее на множитель  $\sqrt{\text{Re}_G}$ . Заметим, что значение  $\rho_B W_B$  для всех систем тепловой защиты следует определять как  $\rho_B W_B = \dot{m}_A / A$ , где  $\dot{m}_A$  – массовый расход пара или газа, приходящийся на площадь  $A$  защищаемой поверхности.

Оценивая степень уменьшения коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  при вдуве инородного газа в пограничный слой основного потока по сравнению со значением этого коэффициента  $\alpha_0$  для непроницаемой стенки, ориентируются на соответствующие формулы плоской пластины.

Например, в случае ламинарного погранслоя одна из таких зависимостей имеет вид

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 - 1,82 \left( \frac{\mu_G}{\mu_B} \right)^{1/3} \frac{\rho_B W_B}{\rho_G W_G} \sqrt{\text{Re}_{GX}}, \quad (14.58)$$

где значение  $\rho_B$  берут при температуре стенки, а критерий Рейнольдса вычисляют по средней температуре пограничного слоя.

Для турбулентного погранслоя можно использовать формулу

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \exp \left\{ 0,48 B_0 \frac{c_{pG}}{c_{pB}} \left[ 1 - 1,57 \ln \left( \frac{\mu_G}{\mu_B} + 0,89 \right) \right] \right\}, \quad (14.59)$$

в которой коэффициент теплоотдачи  $\alpha'$  соответствует вдуву газа той же природы, что и газ основного потока:

$$\frac{\alpha'}{\alpha_0} = B_0 \exp(0,18B_0) [1 + 1,18B_0 \exp(0,59B_0) - \exp(0,18B_0)]^{-1} \quad (14.60)$$

(это выражение записано для случая газа с  $Pr = 0,7$ ). Здесь безразмерный комплекс  $B_0 = \rho_B W_B c_{p_B} / \alpha_0$ .

Следует заметить, что существенное снижение коэффициента теплоотдачи наблюдается уже при небольшом количестве вдуваемого газа, особенно если этот газ холодный. Поскольку вдув снижает устойчивость ламинарного пограничного слоя, для такого погранслоя следует избегать чрезмерного вдува, который может турбулизовать пограничный слой, в результате чего будет получен эффект, обратный желаемому.

Плотность расхода вдуваемого газа  $\rho_B W_B$  может быть «назначена» лишь в системах заградительного охлаждения. При использовании аблирующих покрытий, пленочного и пористого охлаждения величину  $\rho_B W_B$  определяет режим работы системы защиты.

Равновесный тепловой режим наступает при условии

$$\frac{\alpha}{c_{p_w}} (I_T - I_w) = q_{вн} + \rho_B W_B \Delta i, \quad (14.61)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $c_{p_w}$  – изобарная теплоемкость горячего газа при температуре стенки;  $I_w$  и  $I_T$  – полные энтальпии газа при температурах стенки и восстановления (см. подразд. 12.3.5);  $q_{вн}$  – плотность теплового потока, уходящего внутрь защищаемой стенки;  $\Delta i = \Delta i_T + r$  есть изменение энтальпии вещества в ходе «получения» парообразных или газообразных продуктов как результата работы системы защиты. Эта величина включает теплоту  $\Delta i_T$ , необходимую для прогрева вещества до температуры фазового перехода, и теплоту  $r$  самого перехода. Естественно, что коэффициент теплоотдачи здесь зависит от плотности массового расхода упомянутых продуктов  $\rho_B W_B$  (значение  $\alpha$  можно найти, используя приведенные выше зависимости).

Рассмотрим проблему расчета величины  $\rho_B W_B$  на примере системы с испарением слоя защитного вещества. При умеренной скоро-

сти испарения можно считать, что перенос («вдув») пара в поток горячего газа осуществляется только посредством молекулярной диффузии. Тогда плотность массового расхода (потока) пара у поверхности испарения определится *законом Фика*:  $\rho_B W_B = -D(\partial C/\partial n)_{n=0}$ , где  $D$  – коэффициент молекулярной диффузии,  $C$  – концентрация пара в парогазовой смеси у поверхности,  $n$  – нормаль к этой поверхности.

Закон Фика является частным случаем универсального закона молекулярного переноса субстанции, что позволяет усмотреть аналогию процессов диффузии и теплообмена в газовой среде. На этом основании выразим плотность молекулярного потока пара формулой  $\rho_B W_B = \beta(C_W - C_\Gamma)$ , аналогичной закону Ньютона – Рихмана (12.1). Здесь  $\beta$  – коэффициент массоотдачи;  $C_W$  и  $C_\Gamma$  – концентрации пара непосредственно у поверхности испарения и на линии, отделяющей погранслои от остальной зоны течения горячего газа.

Сопоставив последнее соотношение для  $\rho_B W_B$  с законом Фика, получаем *уравнение массоотдачи*

$$\beta = -\frac{D}{C_W - C_\Gamma} \left( \frac{\partial C}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (14.62)$$

аналогичное уравнению теплоотдачи (12.3). В безразмерной форме оно примет вид

$$Nu_d = -(\partial \bar{C}/\partial \bar{n})_{\bar{n}=0}, \quad (14.63)$$

если ввести безразмерную концентрацию как  $\bar{C} = (C - C_\Gamma)/(C_W - C_\Gamma)$  и принять во внимание, что комплекс  $\beta l/D$  является безразмерным (координата  $\bar{n} = n/l$ , где  $l$  – характерный линейный размер). Упомянутый комплекс по аналогии с критерием Нуссельта (12.4) называют *диффузионным числом Нуссельта*:

$$Nu_d = \frac{\beta l}{D}. \quad (14.64)$$

Заметим, что в форме, аналогичной (14.63), можно представить и безразмерное уравнение теплоотдачи (см. подразд. 12.2.1), если ввести безразмерную температуру  $\bar{T} = (T - T_\Gamma)/(T_W - T_\Gamma)$ :

$$Nu = -(\partial \bar{T}/\partial \bar{n})_{\bar{n}=0}. \quad (14.65)$$

Еще раз укажем на аналогию уравнений массоотдачи (14.62) и теплоотдачи (12.3). Более того, безразмерные формы (14.63) и (14.65) этих уравнений тождественны для одной и той же системы, поскольку

определяющий размер здесь один и тот же, а величины  $\bar{C}$  и  $\bar{T}$  на границах системы численно одинаковы: на поверхности тела  $\bar{C} = \bar{T} = 1$ , вдали от нее  $\bar{C} = \bar{T} = 0$ .

По этой причине критериальное сразу писать аналогичное уравнение массоотдачи в рассматриваемой системе имеет вид  $Nu_D = B Re^m Pr_D^n$ , где  $Pr_D = \nu/D$  – диффузионное число Прандтля, а величины  $B, m, n$  взяты из аналогичного уравнения теплоотдачи в той же системе. Найдя из такого уравнения критерий  $Nu_D$ , вычисляют значение коэффициента массоотдачи  $\beta$  согласно выражению (14.64) и далее определяют искомую плотность потока пара по формуле  $\rho_B w_B = \beta(C_w - C_\Gamma)$ .

В действительности упомянутая аналогия процессов массообмена и теплопереноса может нарушаться вследствие взаимного их влияния, наличия конвективной диффузии, отличия значений диффузионного и обычного чисел Прандтля. Методы учета этих обстоятельств указаны в специальной литературе.

В любом случае нахождение плотности массового потока пара  $\rho_B w_B$  требует знания температуры поверхности испарения. Однако она становится известной только по завершении всего расчета тепловой защиты как температура, вытекающая из условия (14.61). Значение этой равновесной температуры и соответствующий ей поток пара можно найти графически (рис. 14.7). Для этого надо построить зависимости от температуры  $T_w$  величин  $\rho_B w_B$ ,

$q_{отв} = \rho_B w_B \Delta i + q_{вн}$ ,

$q_{пад} = q_{изл} + \alpha(I_\Gamma - I_w)/c_{p_B}$ .

При этом берут несколько значений  $T_w$ , меньших температуры насыщения для заданного давления газа.

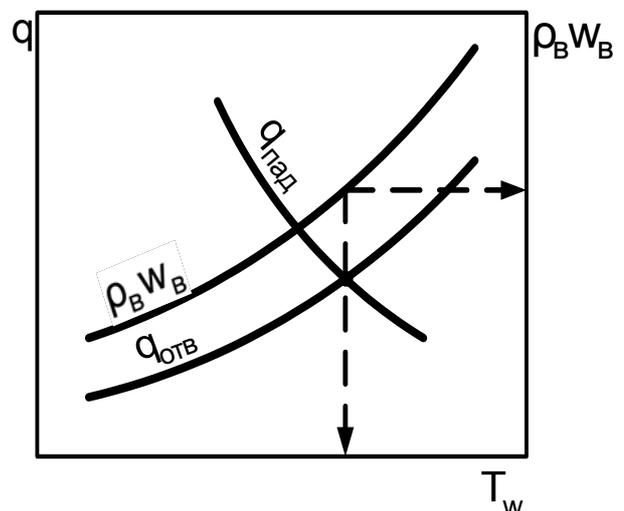


Рис. 14.7

#### 14.6. Основы расчета рекуперативных теплообменников

В теплотехнике широкое распространение получили *рекуперативные* теплообменники – устройства, в которых происходит стационарный обмен теплотой между потоками текучих сред (теплоносители-

лей). Чаще всего эти потоки разделены твердой «стенкой» (поверхностью теплообмена); такие рекуператоры называют *поверхностными*.

По взаимному направлению потоков теплоносителей различают теплообменники прямоточные (спутное направление, рис. 14.8, а), противоточные (встречное направление, рис. 14.8, б) и с перекрестным током (упомянутые направления перпендикулярны, рис. 14.8, в).

Возможны одноводовые и многоходовые варианты реализации таких направлений течения, также комбинирование. Например, теплообменным схемам 14.8 а и б на рис. 14.9 показана схема трехходового теплообменника с перекрестным током.

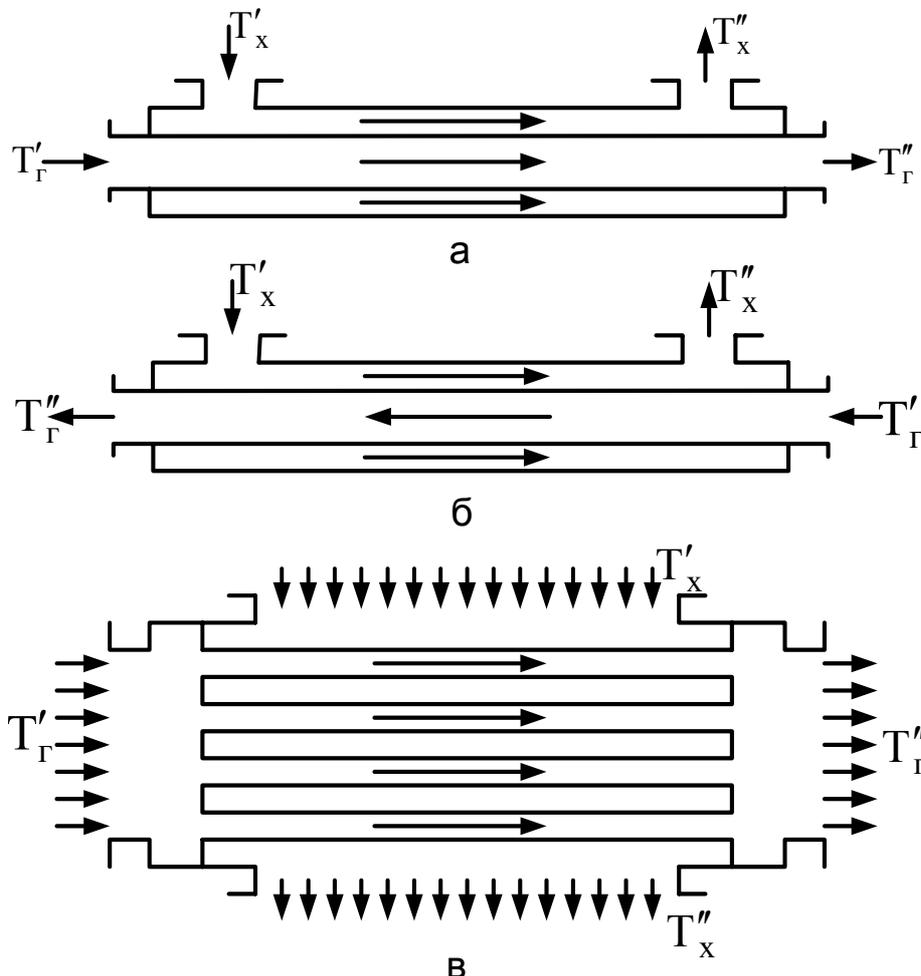


Рис. 14.8

Можно выделить различные направления течения, а их комбинация. Например, все обобщения по рис. 14.8 являются одноводовыми, рис. 14.8 а и б довольно часто

Рассматриваемые теплообменные аппараты классифицируют еще по конструкции поверхностей теплообмена. Последние обычно выполняют в виде труб и пластин разной конфигурации, объединенных в «сборки», которые образуют системы с параллельным размещением каналов для прохода теплоносителя. Эти сборки далее компонуют так, чтобы обеспечить указанные выше схемы взаимного течения горячего и холодного теплоносителей, а также заданное число ходов.

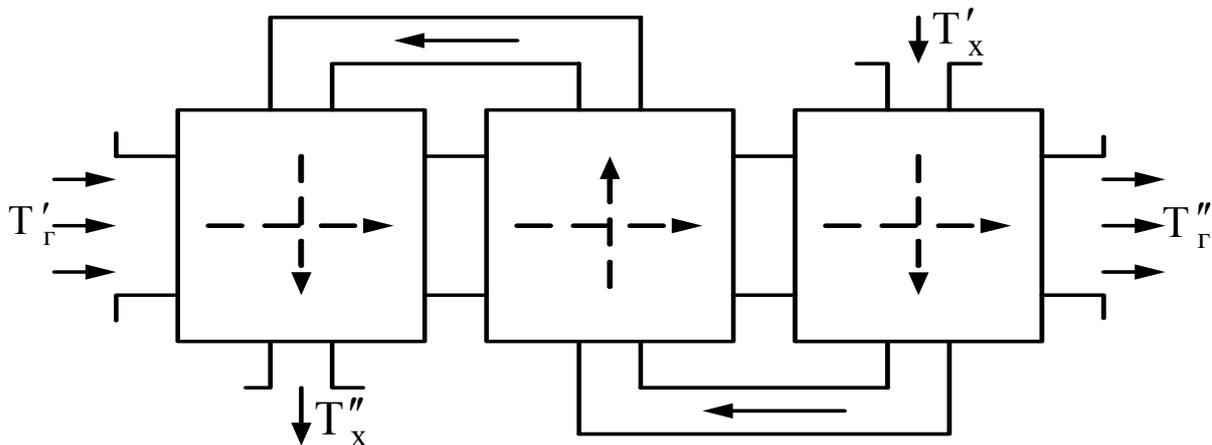


Рис. 14.9

Важной частью проектирования рекуперативного теплообменника поверхностного типа является определение площади  $F$  разделительной стенки при заданном тепловом потоке  $Q$  и температуре теплоносителей на входе. В основе расчета лежат: *уравнение теплопередачи*

$$Q = k \overline{\Delta T} F \quad (14.66)$$

и *уравнение теплового баланса*

$$Q = -\dot{m}_Г c_Г (T''_Г - T'_Г) = \dot{m}_Х c_Х (T''_Х - T'_Х). \quad (14.67)$$

Здесь  $k$  – коэффициент теплопередачи (см. подразд. 14.1);  $\overline{\Delta T}$  – средний на поверхности теплообмена температурный напор между горячим и холодным теплоносителями;  $\dot{m}$  – массовый расход теплоносителя;  $c$  – его удельная теплоемкость (в случае газа – при постоянном давлении); индексы «Г» и «Х» соответствуют горячему и холодному теплоносителям; индексами «'» и «''» помечена температура  $T$  теплоносителей на входе и выходе их.

Значение площади  $F$  поверхности теплообмена находят по уравнению (14.66), вычислив предварительно величины  $k$  и  $\overline{\Delta T}$ . В качестве  $\overline{\Delta T}$  обычно берут среднелогарифмический температурный напор, формула которого близка к приведенной в подразд. 12.2.4:

$$\overline{\Delta T} = \frac{\Delta T_Б - \Delta T_М}{\ln(\Delta T_Б / \Delta T_М)} \varepsilon_{\Delta T}. \quad (14.68)$$

Здесь  $\Delta T_Б$  и  $\Delta T_М$  – больший и меньший из температурных напоров  $\Delta T = T_Г - T_Х$  на входе и выходе теплообменника;  $\varepsilon_{\Delta T}$  – поправочный коэффициент, зависящий от схемы течения теплоносителей и температур их на входе и выходе. Первый множитель в записанной

формуле отвечает одноходовому теплообменнику с противотоком; для него  $\varepsilon_{\Delta T} = 1$ . Значения  $\varepsilon_{\Delta T}$  у других типов теплообменников приведены в теплотехнических справочниках.

Как видно, для вычисления  $\overline{\Delta T}$  надо заранее знать взаимное направление движения теплоносителей и значения их «оконечных» температур. Обычно величина  $T''_x$  известна, а значением  $T''_T$  задаются. Предварительно выбирают и компоновку аппарата, проверив затем, обеспечивает ли она рассчитанную площадь  $F$  поверхности теплообмена. В необходимых случаях прибегают к секционированию, включая секции по параллельной или многоходовой схемам.

Далее по уравнению (14.67) определяют расходы  $\dot{m}$  теплоносителей, что позволяет вычислить скорости  $W$  их течения ( $\dot{m} = \rho w A$ , где  $\rho$  – плотность теплоносителя,  $A$  – площадь поперечного сечения канала). Найденные значения  $W$  сравнивают с рекомендуемыми в справочниках, а при несовпадении их корректируют компоновку теплообменника (обычно добиваются турбулентного режима течения обоих теплоносителей).

Заметим, что конструктивную схему аппарата, конечные температуры теплоносителей и скорости их течения надо знать и для расчета величины  $k$ , поскольку в нее входят коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_T$  и  $\alpha_x$  (см. подразд. 14.1).

По этим причинам расчет теплообменников требует применения метода последовательных приближений и рассмотрения большого числа вариантов.

При выборе схемы течения теплоносителей следует учесть, что наибольшее значение температурного напора  $\overline{\Delta T}$  (и следовательно, минимум площади  $F$  поверхности теплообмена) дает противоток. Прямоток приближается к нему по эффективности только если величины  $\dot{m}c$  у теплоносителей сильно различаются и значение  $\overline{\Delta T}$  существенно больше изменения их температуры.

Схема с перекрестным током занимает промежуточное положение между прямотоком и противотоком по величине  $\overline{\Delta T}$ . Следует, однако, учесть, что поперечное обтекание труб по сравнению с продольным обеспечивает большие значения  $\alpha$ . Это увеличивает коэффициент теплопередачи, что в силу формулы (14.66) может дать минимальное значение  $F$  у трубчатого теплообменника с перекрестным, а не параллельным током.

Сравнивая различные варианты передачи заданного количества теплоты  $Q$ , обращают внимание не только на площадь  $F$  поверхности теплообмена, которая определяет габариты и металлоемкость

аппарата. Важное значение имеет мощность  $N = \dot{m}\Delta p_{\Sigma} / \rho$ , затрачиваемая на прокачку теплоносителя. Здесь  $\Delta p_{\Sigma}$  – суммарное изменение давления по тракту движения теплоносителя, которое обычно состоит из путевых и местных потерь давления. В случае газовых рабочих тел учитывают еще изменение давления, связанное с подводом и отводом теплоты. Влияние неизотермности течения на коэффициенты сопротивления учитывают, умножая последние на поправку  $(Pr_w / Pr_f)^{0,33}$ .

## 14.7. Модели процессов в термоциркуляционных контурах

### 14.7.1. Исходные понятия и определения

*Термоциркуляционным контуром* называют устройство, которое передает теплоту на конечное расстояние из области с большей температурой в область с меньшей температурой посредством текучей среды, движение которой по замкнутому пути, связывающему указанные области, обеспечивается за счет самого процесса теплопереноса (при участии поля массовых сил либо разности капиллярного давления). В первом случае текучую среду применяют как в однофазном, так и в двухфазном состоянии, во втором она непременно должна совершать фазовый переход.

Использование упомянутого способа перемещения текучей среды делает термоциркуляционный контур автономно функционирующим объектом с большим ресурсом (здесь нет подвижных узлов). Важнейшая особенность термоциркуляционных контуров – способность передавать значительные плотности теплового потока  $q$  на большие расстояния  $l$  при относительно малых температурных напорах  $\Delta T$ . *Эффективная теплопроводность*  $\lambda_{\text{эф}} = ql / \Delta T$  двухфазных термоциркуляционных контуров может в сотни и тысячи раз превосходить теплопроводность меди, а их масса много меньше, чем у металлических теплопроводов аналогичных размеров. Величина  $\lambda_{\text{эф}}$  у однофазных термоциркуляционных контуров не столь велика, поэтому далее они не рассматриваются.

Конструктивно термоциркуляционные контуры могут быть выполнены в виде одного устройства типа трубы (рис. 14.10) или как совокупность отдельных элементов для нагрева текучей среды, ее транспортировки и охлаждения (рис. 14.11). Двухфазные термоциркуляционные контуры первого типа принято называть *тепловыми трубами*, второго – *контурными тепловыми трубами*.

В зависимости от уровня температуры  $T$  объектов, между которыми необходимо обеспечить теплоперенос, различают обычные и контурные тепловые трубы: высокотемпературные ( $T > 750 \text{ K}$ ), среднетемпературные ( $T = 750 \dots 550 \text{ K}$ ), низкотемпературные ( $T = 550 \dots 200 \text{ K}$ ) и криогенные ( $T < 200 \text{ K}$ ). В качестве текучих сред (теплоносителей) здесь используют соответственно: расплавы металлов, кремнийорганику, спирты, сжиженные газы. В каждом из температурных диапазонов отдают предпочтение теплоносителю, имеющему максимальную теплоту фазового перехода  $r$ ; для труб с капиллярной структурой необходимо также большое значение отношения коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  и кинематической вязкости  $\nu$ . Наиболее распространены средне- и низкотемпературные тепловые трубы обычного и контурного типа; именно они и рассмотрены далее.

Независимо от уровня температуры и схемно-конструктивного решения двухфазного термоциркуляционного контура в нем происходят процессы парообразования, конденсации, течения пара и жидкости. Математические модели термоциркуляционных контуров должны не только описывать указанные процессы, но и решать задачу их оптимального сочетания с определением эффективной теплопроводности контура и предельного значения передаваемого им теплового потока.

### **14.7.2. Гладкостенные тепловые трубы**

В таких двухфазных термоциркуляционных контурах движение теплоносителя обеспечивается массовой силой, поэтому взаимное положение обогреваемого и охлаждаемого участков (испарителя и конденсатора) должно быть «увязано» с направлением вектора напряженности этой силы.

Например, в гравитационных гладкостенных тепловых трубах (их еще называют двухфазными термосифонами) конденсатор всегда размещают выше испарителя (рис. 14.10, а). Под действием силы тяжести конденсат, образующийся на охлаждаемом участке корпуса, стекает вниз по стенке вдоль транспортной (адиабатной) зоны и попадает в испаритель (на обогреваемый участок). Пар поднимается

отсюда по центральной части сечения трубы под действием разности давлений пара в испарителе и конденсаторе.

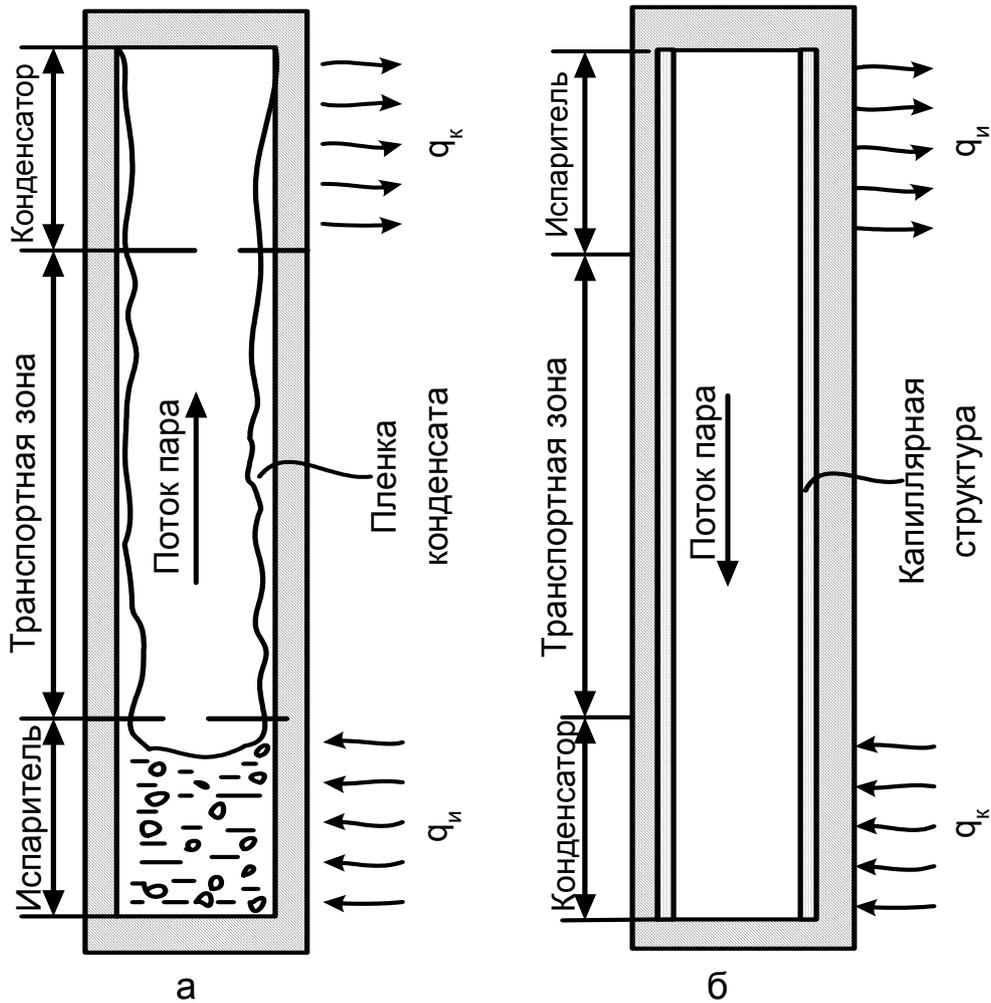


Рис. 14.10

Высокая эффективная теплопроводность однофазного термосифона возможна лишь при малой толщине пленки в конденсаторе и развитом пузырьковом кипении в испарителе. В зависимости от степени заполнения термосифона жидкостью кипение происходит либо в пленке, либо в «столбе» теплоносителя.

В первом случае коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{и}$  в испарителе находят по критериальному уравнению

$$Nu_* = 0,0096 Re_*^{0,7} Pr^{-0,3} K_p^{0,6}, \quad (14.69)$$

в котором число Рейнольдса  $Re_*$  определено по «приведенной скорости кипения»  $w_{кип} = q_{и} / (r\rho'')$  и кинематической вязкости  $\nu' = \mu' / \rho'$ ; критерий Прандтля вычислен обычным образом ( $Pr = \mu'c' / \lambda'$ ); комплекс  $K_p$  представляет собой отношение

давления насыщения  $p_H$  к напряженности  $\sqrt{\sigma g(\rho' - \rho'')}$  силы, оттесняющей жидкость от стенки при образовании на ней сплошной пленки пара. Здесь  $q_{и}$  – плотность теплового потока на поверхности обогрева,  $r$  – удельная теплота фазового перехода,  $\rho$  – плотность,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $c$  – удельная теплоемкость,  $\lambda$  – теплопроводность,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $g$  – гравитационное ускорение; индексы «'» и «''» отнесены соответственно к жидкости и пару на линии насыщения; характерным линейным размером в числах  $Nu_*$  и  $Re_*$  служит капиллярная постоянная  $l_* = \sqrt{\sigma/[g(\rho' - \rho'')]}$ . Уравнение (11.69) обобщает опытные данные, полученные для вертикально расположенных двухфазных термосифонов с внутренним диаметром  $d_B = 6...24$  мм и длиной испарителя  $l_{и} = 50...350$  мм, имеющих степень заполнения теплоносителем (вода, спирт, фреоны)  $\varepsilon = 1...40$  % при  $q_{и} = (2...50) \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup> и давлении  $p = 0,08...1,2$  МПа.

Если испаритель полностью заполнен жидкостью (рис. 14.10, а), то коэффициент теплоотдачи в нем отвечает уравнению

$$Nu_* = 0,0041 \left( \frac{q_{и} p_H c'}{g \rho'' r \lambda'} \right)^{0,5} \left( \frac{d_B}{l_*} \right)^{0,17}. \quad (14.70)$$

Здесь отношение внутреннего диаметра термосифона  $d_B$  и капиллярной постоянной  $l_*$  учитывает влияние «стесненности» объема на процесс пузырькового кипения. Безразмерный комплекс  $[q_{и} p_H c' / (g \rho'' r \lambda')]$  можно представить произведением  $Re_* Pr K_p (\rho' - \rho'') / \rho''$ . Опыты проводились на упомянутых выше термосифонах с большей степенью заполнения ( $\varepsilon > 50\%$ ) при  $q_{и} = (0,16...150) \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup> и  $p = 0,001...1,5$  МПа.

Кипение в пленке обеспечивает более высокие значения коэффициента теплоотдачи  $\alpha_{и}$  по сравнению со случаем кипения в столбе жидкости. Однако поддерживать устойчивое кипение в пленке

сложно (здесь часто возникает осушение поверхности испарителя). Поэтому предпочтительны режимы, когда испаритель практически весь заполнен кипящей жидкостью. При этом паросодержание двухфазной среды увеличивается к выходу из испарителя, так что по высоте его наблюдаются все режимы кипения – от пузырькового поверхностного до дисперсно-кольцевого (см. подразд. 12.4.2).

В конденсаторе термосифона обеспечить пленочный режим работы легче. Среднее значение коэффициента теплоотдачи здесь в первом приближении можно найти по формуле Нуссельта (12.31). Более точные результаты дает экспериментальная зависимость

$$\text{Nu} = 0,644 \text{Re}_\delta^{-0,28}, \quad (14.71)$$

в которой число Рейнольдса вычислено по толщине и скорости пленки конденсата ( $\text{Re}_\delta = \rho' w_{\text{пл}} \delta_{\text{пл}} / \mu'$ ); в критерии Нуссельта

характерным линейным размером служит величина  $[(v')^2 / g]^{1/3}$ .

Произведение  $\rho' w_{\text{пл}} \delta_{\text{пл}}$ , представляющее собой массовый расход жидкости, приходящийся на единицу периметра сечения

конденсатора, часто называют плотностью орошения  $\Gamma$  поверхности конденсатора, поэтому число Рейнольдса можно записать как

$\text{Re}_\delta = \Gamma / \mu'$ . Уравнение (14.71) соответствует опытам с

вертикальными двухфазными термосифонами, имеющими

внутренний диаметр  $d_B = 6...24$  мм и длину конденсатора

$l_K = 50...200$  мм при степени заполнения  $\varepsilon = 2...50$  % водой,

спиртом, фреонами. Диапазон изменения характерных величин:

число Рейнольдса  $\text{Re}_\delta = 0,5...70$ , плотность теплового потока

на поверхности охлаждения  $q_K = (0,3...40) \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup>, давление в

термосифоне  $p = 0,03...1,5$  МПа.

Значения коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_{\text{И}}$  и  $\alpha_{\text{К}}$  являются основой вычисления эффективной теплопроводности двухфазного

термосифона  $\lambda_{\text{эф}} = q_{\text{ПС}} l_{\text{ср}} / \Delta T_{\text{ИК}}$ . Здесь плотность теплового

потока  $q_{\text{ПС}}$  относят к поперечному сечению термосифона  $\pi d_{\text{Н}}^2 / 4$ ,

вычисленному по его наружному диаметру  $d_{\text{Н}}$  (для удобства

сравнения со сплошными металлическими теплопроводами). Средний

путь теплопереноса  $l_{\text{ср}}$  определяется длиной транспортной зоны  $l_{\text{Т}}$  и

полусуммой длин испарителя  $l_{\text{И}}$  и конденсатора  $l_{\text{К}}$ . Температурный

напор  $\Delta T_{\text{ИК}}$  соответствует процессам кипения и конденсации, а

также теплопроводности поперек стенки на соответствующих участках корпуса (перепадом температуры при транспорте пара в средне- и низкотемпературных термосифонах пренебрегают). С учетом сказанного и согласно подразд. 11.3.4. и 12.1.2 имеем:

$$\lambda_{\text{эф}} = \frac{4[(l_{\text{и}} + l_{\text{к}})/2 + l_{\text{т}}]}{d_{\text{н}}^2} \left[ \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_{\text{н}}}{d_{\text{в}}} \left( \frac{1}{l_{\text{и}}} + \frac{1}{l_{\text{к}}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{d_{\text{в}}} \left( \frac{1}{l_{\text{и}}\alpha_{\text{и}}} + \frac{1}{l_{\text{к}}\alpha_{\text{к}}} \right) \right]^{-1} \quad (14.72)$$

(скачки температуры, связанные собственно с фазовыми переходами, не учтены ввиду их малости).

Предельный тепловой поток  $Q^{\text{пр}}$ , который способен передавать двухфазный термосифон, обычно устанавливают по кризису пузырькового кипения (см. подразд. 12.4.1). Если кипение идет в столбе жидкости, то соответствующую плотность теплового потока  $q_{\text{и}}^{\text{пр}}$ , отнесенную к внутренней поверхности испарителя  $\pi d_{\text{в}} l_{\text{и}}$ , находят по формуле Кутателадзе (12.29), которую дополняют множителем, учитывающим влияние давления и геометрического «стеснения»:

$$q_{\text{и}}^{\text{пр}} = (0,13 \dots 0,16) r \sqrt{\rho''} \sqrt[4]{\sigma g (\rho' - \rho'')} \left\{ 1 - \exp \left[ (l_{\text{и}} / d_{\text{в}}) (\rho' / \rho'')^{0,13} \right] \right\}. \quad (14.73)$$

Чтобы обеспечить надежную работу двухфазного термосифона, рекомендуют степень заполнения его внутреннего объема жидкостью  $\varepsilon \approx 0,3 \dots 0,5$ . Характеристики термосифона существенно улучшаются при наличии вставок, разделяющих паровой и жидкостный потоки. Расчет таких термосифонов рассмотрен в специальной литературе.

### 14.7.3. Фитильные тепловые трубы

В классической тепловой трубе (см. рис. 14.10, б) возврат теплоносителя из конденсатора в испаритель обеспечивает размещенная на внутренней поверхности корпуса капиллярно-пористая структура (*фитиль*). Поэтому такая труба может функционировать при любой ориентации в пространстве; ее работоспособность сохраняется и в условиях космоса.

Поскольку в порах, обращенных к паровой полости, находится смачивающая жидкость, в них образуются вогнутые криволинейные поверхности раздела фаз (мениски). В результате этого давление в

жидкости  $p_{ж}$  оказывается меньше, чем в паре  $p_{п}$ , на величину так называемого *капиллярного давления*  $p_{кап}$ . Для сферического мениска с радиусом кривизны  $R_M$ , согласно уравнению Лапласа, будет  $p_{кап} = 2\sigma/R_M$ , где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Интенсивное испарение жидкости из фитиля в зоне подвода теплоты приводит к существованию здесь менисков с малым радиусом кривизны  $R_M^и$ , что создает ощутимую разность давлений  $p_{п}^и - p_{ж}^и = 2\sigma/R_M^и$ . В то же время фитиль конденсатора, как правило, «затоплен» жидкостью, так что в нем радиус кривизны менисков  $R_M^к$  соизмерим с радиусом паровой полости тепловой трубы. По этой причине разность давлений жидкости и пара в конденсаторе  $p_{п}^к - p_{ж}^к = 2\sigma/R_M^к$  значительно меньше, чем в испарителе.

Вычитая записанные равенства, имеем

$$p_{ж}^к - p_{ж}^и = 2\sigma\left(1/R_M^и - 1/R_M^к\right) - \left(p_{п}^и - p_{п}^к\right). \quad (14.74)$$

Как видно, перепад давления жидкости по длине фитиля определяется разностью капиллярных давлений и перепадом давления пара. Процессы, происходящие в тепловых трубах, таковы, что  $p_{п}^к < p_{п}^и$  (вследствие этого пар и перемещается из испарителя в конденсатор). Но размеры пор фитиля настолько малы, что разность  $2\sigma\left(1/R_M^и - 1/R_M^к\right)$  на два-три порядка превышает величину  $\Delta p_{п} = p_{п}^и - p_{п}^к$ . В итоге давление жидкости в конденсаторе  $p_{ж}^к$  оказывается более высоким, чем аналогичное давление  $p_{ж}^и$  в испарителе, что и обеспечивает перетекание жидкости из конденсатора в испаритель.

Уравнение (14.74) баланса давлений в фитильной тепловой трубе обычно переписывают в виде

$$\Delta p_{ж} + \Delta p_{п} = 2\sigma\left(1/R_M^и - 1/R_M^к\right). \quad (14.75)$$

Согласно форме записи (14.75), ему, сумма перепадов давлений по жидкости  $\Delta p_{ж}$  и по пару  $\Delta p_{п}$  в полости тепловой трубы компенсируется разностью капиллярных давлений  $p_{кап} = 2\sigma/R_M$  в испарителе и конденсаторе. Именно разность капиллярных давлений является «движущим фактором», обеспечивающим циркуляцию

теплоносителя в фитильной тепловой трубе при передаче ею теплоты.

Выражение (14.75) рассматривают как *гидродинамическое условие* работы фитильной тепловой трубы. Входящая в него величина  $\Delta p_{ж}$  состоит из вязкостных потерь  $\Delta p_{ж.тр}$  и перепада давления  $\Delta p_{ж.м}$ , необходимого для преодоления действия массовых сил (потерями давления, вызванными подтормаживанием жидкости встречным потоком пара вследствие их взаимодействия на поверхности фитиля, пренебрегают). Величина  $\Delta p_{п}$  включает вязкостные потери  $\Delta p_{п.тр}$ , а также инерционный перепад давления  $\Delta p_{п.ин}$ , связанный с подводом пара к потоку в испарителе и отводом его в конденсаторе. Изменение давления пара над искривленной поверхностью раздела фаз и скачки давления при фазовых переходах здесь не учитывают.

Для сплошных фитилей значение  $\Delta p_{ж.тр}$  находят по формуле Кармана – Козени:

$$\Delta p_{ж.тр} = \dot{m} v_{ж} \frac{l_{ф}}{K_{ф} A_{ф}}, \quad (14.76)$$

где  $\dot{m}$  – массовый расход теплоносителя;  $v_{ж}$  – кинематическая вязкость жидкости;  $l_{ф}$  – длина рассматриваемого участка;  $K_{ф}$  и  $A_{ф}$  – проницаемость и площадь поперечного сечения фитиля. В первом приближении можно принять  $v_{ж}$  равной значению  $v$  жидкости на линии насыщения ( $v_{ж} = v'$ ), а величину  $l_{ф}$  для всего фитиля определить как  $l_{ср} = l_{Т} + (l_{И} + l_{К})/2$ , считая, что испарение и конденсация идут равномерно по длине обогреваемой ( $l_{И}$ ) и охлаждаемой ( $l_{К}$ ) зон тепловой трубы ( $l_{Т}$  – длина транспортного участка).

Перепад давления  $\Delta p_{ж.м}$  определяется плотностью жидкости  $\rho_{ж}$ , напряженностью массовой силы  $\vec{f}$ , длиной  $l_{ф}$  и углом между векторами  $\vec{f}$  и  $\vec{l}$ . Например, при работе трубы в поле сил тяжести будет

$$\Delta p_{ж.м} = \rho_{ж} g l_{\phi} \sin \phi, \quad (14.77)$$

где  $\phi$  – угол наклона трубы к горизонту. Если температура жидкости мало изменяется по длине трубы, принимают  $\rho_{ж} = \rho'$  и берут  $l_{\phi} = l_{ср}$  для всего фитиля. При подстановке  $\Delta p_{ж.м}$  согласно (14.77) в формулу  $\Delta p_{ж} = \Delta p_{ж.тр} + \Delta p_{ж.м}$  значений  $\Delta p_{ж.м}$ , вычисленных по уравнению (14.77), им присваивают знак «–» в случае, когда конденсатор расположен выше испарителя.

Перепад давления по пару  $\Delta p_{\Pi}$  зависит от режима работы тепловой трубы. В большинстве случаев число Рейнольдса  $Re_{\Pi}$  таково, что надо учитывать уменьшение давления пара в испарителе из-за инерционных эффектов и вязкостные потери на участке  $l_{И} + l_{Т}$  (в конденсаторе эти потери компенсируются инерционным ростом  $p_{\Pi}$ ).

Поэтому изменение давления пара в средне- и низкотемпературных трубах обычно рассчитывают по зависимости

$$\Delta p_{\Pi} = \left( 2 + \frac{34,41 l_{И}}{Re_{\Pi} d_{\Pi}} + \frac{51,93 l_{Т}}{Re_{\Pi} d_{\Pi}} \right) \frac{\dot{m}^2}{\rho_{\Pi} d_{\Pi}^4}, \quad (14.78)$$

где  $Re_{\Pi} = 4\dot{m}/(\pi d_{\Pi} \mu_{\Pi})$ ;  $d_{\Pi}$  – диаметр паровой полости; плотность  $\rho_{\Pi}$  и  $\mu_{\Pi}$  пара берут на линии насыщения ( $\rho_{\Pi} = \rho''$ ,  $\mu_{\Pi} = \mu''$ ). Формула (14.78) отвечает ламинарному течению пара, которое чаще всего реализуется в рассматриваемых тепловых трубах. Близкие результаты дает соотношение

$$\Delta p_{\Pi} = 40,76 \dot{m} \frac{\mu_{\Pi}}{\rho_{\Pi}} \cdot \frac{l_{Т} + l_{И} (1 + 0,0875 Re_{\Pi} d_{\Pi} / l_{И}) / 2}{d_{\Pi}^4}. \quad (14.79)$$

Капиллярный напор  $\Delta p_{кап} = 2\sigma(1/R_{М}^{И} - 1/R_{М}^{К})$  принято определять как  $\Delta p_{кап} = 2\sigma/R_{М}^{И}$ , поскольку величина  $1/R_{М}^{К}$  крайне мала по сравнению со значением  $1/R_{М}^{И}$  ввиду затопленности фитиля конденсатора. Радиус кривизны мениска в испарителе  $R_{М}^{И}$  считают соответствующим *максимальному капиллярному давлению*

$$p_{\text{кап}}^{\text{макс}} = 2\sigma \cos \theta / R_{\text{эф}}, \quad (14.80)$$

где  $\theta$  – угол смачивания (краевой угол),  $R_{\text{эф}}$  – эффективный радиус пор фитиля (отвечает порам минимального размера).

С учетом сказанного перепишем гидродинамическое условие работы тепловой трубы (14.75):

$$\Delta p_{\text{ж}} + \Delta p_{\text{п}} = 2\sigma \cos \theta / R_{\text{эф}} \quad (14.81)$$

(для средне- и низкотемпературных труб величину  $\Delta p_{\text{п}}$  чаще всего опускают, поскольку здесь она много меньше  $\Delta p_{\text{ж}}$ ). Это соотношение позволяет найти расход  $\dot{m}_{\text{пред}}$  жидкости, который может «прокачать» фитиль, и тем самым установить предельный тепловой поток  $Q_{\text{пред}}$ , который способна передать тепловая труба.

Действительно, если принять, что теплота подогрева до температуры насыщения или кипения в испарителе и теплота переохладения в конденсаторе незначительны по сравнению с теплотой фазового перехода  $r$ , то  $Q = \dot{m}r$ .

Ввиду малости  $\Delta p_{\text{п}}$  в рассматриваемых тепловых трубах принимают, что температура насыщения  $T_{\text{н}}$  одинакова в испарителе, транспортной зоне и конденсаторе. Поэтому, как указывалось ранее, свойства жидкости и пара можно считать неизменными вдоль трубы, беря их на линии насыщения. В более точных расчетах в качестве определяющей температуры для жидкости берут среднее между  $T_{\text{н}}$  и температурой внутренней поверхности корпуса в соответствующей зоне (при этом составляющие  $\Delta p_{\text{ж}}$  находят отдельно для длин  $l_{\text{и}}/2$ ,  $l_{\text{т}}$  и  $l_{\text{к}}/2$ ).

Тепловой поток, определяемый из условия (14.81), называют *предельным* «по капиллярному впитыванию». Известны и другие причины ограничения передаваемой мощности: унос капель жидкости из фитиля паровым потоком при большой его скорости, достижение этим потоком скорости звука, кризис кипения в фитиле. Для средне- и низкотемпературных труб существенно, кроме капиллярного, лишь последнее ограничение; оно будет рассмотрено в дальнейшем.

Зная передаваемый тепловой поток  $Q$ , можно установить эффективную теплопроводность трубы:

$$\lambda_{\text{эф}} = \frac{4Q[(l_{\text{и}} + l_{\text{к}})/2 + l_{\text{т}}]}{\pi d_{\text{н}}^2 (\Delta T^{\text{и}} + \Delta T^{\text{к}})}, \quad (14.82)$$

где  $d_H$  – наружный диаметр корпуса,  $\Delta T^И$  и  $\Delta T^K$  – температурные напоры в испарителе и конденсаторе. Последние складываются из перепадов температуры  $\Delta T_{корп}$  по толщине корпуса и температурных напоров в фитиле  $\Delta T_{ф}$ .

Величины  $\Delta T_{корп}$  определяют согласно подразд. 11.3.4:

$$\Delta T_{корп}^i = \frac{Q}{2\pi l_i \lambda_{корп}} \ln \frac{d_H}{d_B}, \quad (14.83)$$

где  $l_i = l_И$  на участке подвода теплоты ( $i = И$ ) и  $l_i = l_K$  на участке отвода ( $i = К$ ). Здесь  $\lambda_{корп}$  – теплопроводность материала корпуса,  $d_B$  – его внутренний диаметр.

Аналогично ищут и значения  $\Delta T_{ф}$ , если в испарителе не происходит кипения, а конденсация идет на поверхности фитиля (последнее наблюдается при оптимальной «заправке» трубы теплоносителем). В этом случае

$$\Delta T_{ф}^i = \frac{Q}{2\pi l_i \lambda_{ф}} \ln \frac{d_B}{d_{п}}, \quad (14.84)$$

где  $\lambda_{ф}$  – эквивалентная теплопроводность «смоченного» фитиля,  $d_{п}$  – диаметр паровой полости. Для составных фитилей, у которых элемент с меньшим размером пор расположен со стороны поверхности нагрева, в испарителе ( $i = И$ ) вместо  $d_{п}$  берут величину  $d_B - 2\delta_{ф}$ , где  $\delta_{ф}$  – толщина фитиля.

Если же испаритель работает в режиме кипения,  $\Delta T_{ф}^И$  вычисляют по закону Ньютона – Рихмана (12.1):

$$\Delta T_{ф}^И = Q / (\pi d_B l_И \alpha_И), \quad (14.85)$$

где  $\alpha_И$  – коэффициент теплоотдачи в испарителе при кипении.

Заметим, что режим кипения нежелателен для капиллярных структур «гомогенных» и таких, где размер пор уменьшается в направлении движения пара. Здесь следствием кипения может быть осушение фитиля из-за выброса капель жидкости и оттеснения ее от поверхности нагрева большими пузырями. Это явление называют ограничением передаваемой мощности по «запариванию» фитиля.

В капиллярных структурах начало кипения жидкости наблюдается при перегреве ее  $\Delta T_{ж} = T_{ж} - T_{н}$  относительно температуры насыщения  $T_{н}$ , равном

$$\Delta T_{н.к} = 2\sigma T_{н} / (r\rho'' R_{\max}), \quad (14.86)$$

где  $R_{\max}$  – максимальный радиус пор (именно в порах наибольшего размера жидкость закипает прежде всего). Чтобы кипение не происходило, тепловой поток не должен превышать значения, при котором температурный напор  $\Delta T_{ф}^{и}$  по формуле (14.84) становится равным величине  $\Delta T_{н.к}$ .

Впрочем, указанный предел можно превзойти в несколько раз, если испаритель работает по принципу «перевернутого» (обращенного к поверхности нагрева) мениска. Здесь капиллярную структуру закрепляют на внедренных в нее продольных ребрах корпуса так, что жидкость испаряется в пароотводящие каналы, образованные впадинами между ребрами. Благодаря этому поверхность испарения настолько приближена к обогреваемой стенке, что термическим сопротивлением фитиля можно пренебречь.

Ограничение по запариванию отсутствует в упомянутых ранее фитилях, где размер пор увеличивается по мере удаления от поверхности нагрева. Для них коэффициент теплоотдачи при кипении  $\alpha_{и}$  можно рассчитывать по критериальному уравнению

$$\begin{aligned} Nu = 0,816 Re_{\Pi}^{0,1} Pr_{ж}^{0,4} N_p^{0,23} N_{\phi}^{-0,44} \left( \frac{l_{и}}{R_{эф}} \right)^{0,75} \times \\ \times \left( \frac{d_{\Pi} l_{и}}{\Pi_{\phi} A_{\phi}} \right)^{-1,16} \left( \frac{R_{эф}}{R_{эф}^*} \right)^n, \end{aligned} \quad (14.87)$$

в котором безразмерные комплексы введены так:  
 $Nu = \alpha_{и} R_{эф} / \lambda_{ж}$ ;  $Re_{\Pi} = w_{\Pi} R_{эф} / \nu''$ ;  $N_p = 2\sigma / (p_{н} R_{эф})$ ;  
 $N_{\phi} = R_{эф}^2 / K_{\phi}$  (последний комплекс учитывает влияние структуры фитиля на процесс подвода жидкости к поверхности нагрева). Здесь  $R_{эф}$  – эффективный радиус пор;  $w_{\Pi} = \dot{m} / (\rho'' \pi d_{\Pi} l_{и})$  – скорость

выхода пара из фитиля,  $p_H$  – давление насыщения;  $\Pi_\phi$  и  $K_\phi$  – пористость и проницаемость фитиля.

Уравнение (14.87) обобщает результаты опытов по кипению воды и спирта в тепловых трубах с фитилем из стальных и латунных сеток при  $p_H > 0,1$  бар,  $K_\phi = (2...6) \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$ ,  $R_{\text{эф}} = 0,04...0,2$  мм (половина размера ячейки сетки в слое, обращенном к паровой полости). В опытах была выявлена оптимальная величина эффективного радиуса пор  $R_{\text{эф}}^* = 0,14$  мм; показатель степени  $n$  оказался равным  $n = 4,25$  для  $R_{\text{эф}} < R_{\text{эф}}^*$  и  $n = -0,43$  для  $R_{\text{эф}} > R_{\text{эф}}^*$ . В качестве определяющей температуры жидкости здесь взята величина, средняя между температурами насыщения и внутренней поверхности корпуса.

Заметим, что для описанных капиллярных структур в зависимости (14.80) в качестве  $R_{\text{эф}}$  следует брать величину  $R_{\text{max}}$ .

Плотность теплового потока в испарителе не должна превышать значения, при котором пузырьковое кипение переходит в пленочное. Соответствующую такому кризису кипения величину  $q$  для капиллярно-пористых структур можно оценить по формуле

$$q_{\text{кр}} = 0,52 r \sqrt{\rho''} \sqrt{\sigma \rho' / (\rho' - \rho'')} \Pi_\phi^{2,28} R_{\text{эф}}^{0,5}. \quad (14.88)$$

Как видно из приведенных соотношений, величины  $Q_{\text{пред}}$  и  $\lambda_{\text{эф}}$  фитильных тепловых труб определяются прежде всего характеристиками фитиля – его проницаемостью  $K_\phi$ , эффективным радиусом пор  $R_{\text{эф}}$ , эквивалентной теплопроводностью  $\lambda_\phi$  при смачивании, пористостью  $\Pi_\phi$ .

Методы их расчета для капиллярных структур различного вида приведены в специальной литературе. Там же даны рекомендации по моделированию процессов в тепловых трубах, снабженных составными фитилями (последние устраняют противоречие в требованиях к размеру пор, присущее простому фитилю). Это противоречие вытекает из того, что простой фитиль (см. рис. 10.14, б) не только создает капиллярный напор  $\Delta p_{\text{кап}}$ , но и служит каналом для протока жидкости. Следовательно, здесь эффективный радиус

пор  $R_{эф}$  должен одновременно быть и малым (для создания большого  $\Delta p_{кап}$ ) и большим (для обеспечения низкого гидравлического сопротивления фитиля, определяемого его проницаемостью  $K_{ф}$ ). В составном фитиле указанные функции разделены: жидкость движется по специальным каналам, у которых капиллярными свойствами обладают только стенки. Дальнейшим развитием такой концепции стали контурные тепловые трубы.

#### 14.7.4. Математические модели процессов в контурных тепловых трубах

В таких двухфазных термоциркуляционных контурах капиллярной структурой снабжен только испаритель, а выполненный отдельно от него конденсатор связан с испарителем гладкостенными транспортными трубопроводами для пара и конденсата (рис. 14.11). Обычно контурная тепловая труба снабжена дополнительным элементом – компенсационной полостью (на рис. 14.11 она конструктивно объединена с испарителем).

Указанные отличия контурной тепловой трубы от классической (см. рис. 14.10, б) не приводят к принципиальной разнице в номенклатуре протекающих процессов. Здесь также необходимо дать математическое описание процесса парообразования в капиллярной структуре, процесса конденсации в «стесненных» условиях, процессов течения пара и жидкости по соответствующим трактам. Целью математического моделирования по-прежнему является определение теплового потока, передаваемого тепловой трубой, и ее эффективной теплопроводности.

В связи с этим часть приведенных в подразд. 14.7.3 зависимостей используют и при создании математических моделей процессов в контурных тепловых трубах.

Особенность же их схемы приводит еще к двум условиям работоспособности, дополняющим основное гидродинамическое условие (14.81).

Разность температуры  $\Delta T_{1-7}$  между испаряющей и впитывающей поверхностями капиллярной структуры (см. рис. 14.11) должна обеспечить преодоление перепада давлений  $\Delta p_{нар}$  по наружному относительно фитиля участку циркуляции теплоносителя:

$$\left. \frac{dp}{dT} \right|_{T_{1-7}} (T_1 - T_7) = \Delta p_{нар}, \quad (14.89)$$

где  $(dp/dT)|_{T_{1-7}}$  – среднее значение производной, определяемой уравнением Клапейрона – Клазиуса на участке линии насыщения между точками 1 и 7.

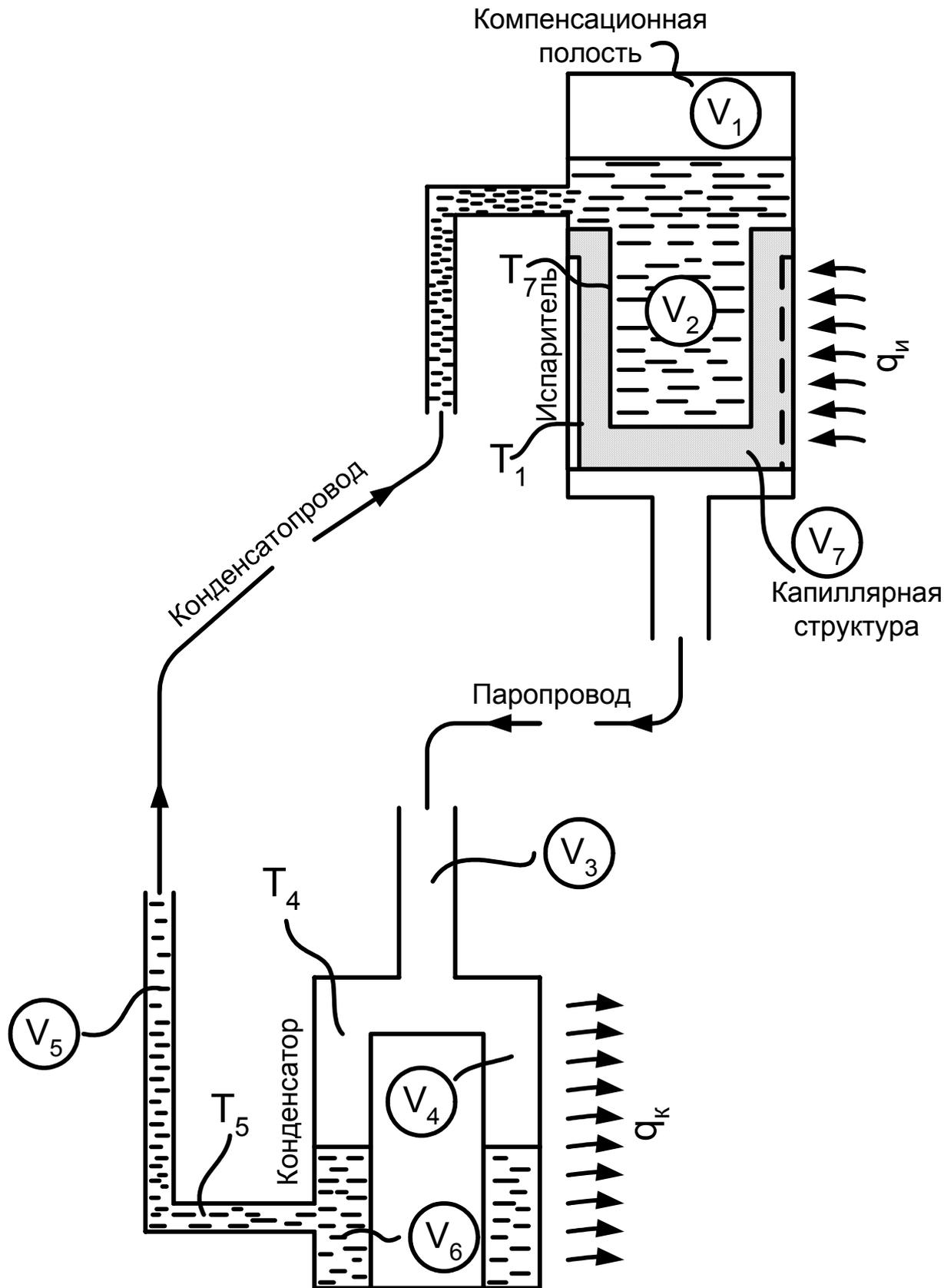


Рис. 14.11

Кроме того, потери давления в конденсатопроводе  $\Delta p_{\text{ж}}^T$  не должны приводить к вскипанию конденсата здесь, для чего необходимо обеспечить переохлаждение жидкости в конденсаторе, отвечающее формуле

$$\left. \frac{dp}{dT} \right|_{T_{4-5}} (T_4 - T_5) \geq \Delta p_{\text{ж}}^T. \quad (14.90)$$

Еще одним условием работоспособности контурной тепловой трубы является соблюдение таких соотношений между объемами элементов трубы и теплоносителя (см. рис. 14.11):

$$V_1 + V_2 = V_3 + V_4; \quad V_{\text{ж}} = V_5 + V_6 + V_7. \quad (14.91)$$

Здесь  $V_1, V_2, V_3, V_4$  – соответственно объемы компенсационной полости, центрального канала испарителя, паропровода и части конденсатора, свободной от жидкости;  $V_{\text{ж}}, V_5, V_6, V_7$  – соответственно объемы жидкости во всей трубе, в конденсатопроводе, в конденсаторе и в капиллярной структуре.

Особенностями испарителя контурных тепловых труб являются преимущественно встречное направление потоков теплоты и жидкости, а также работа зоны испарения по принципу «перевернутых» менисков, когда последние обращены к поверхности нагрева. Для этого на ней (в теле корпуса или фитиля) создана система пароотводящих каналов.

Спецификой испарителя является также выполнение им функции «теплового затвора»: перепад температуры по толщине капиллярной структуры создает соответствующую разность давлений, которая препятствует движению пара к поверхности впитывания с последующим «прорывом» его в компенсационную полость.

В случае больших тепловых потоков жидкость в испарителе может закипать. Чтобы при этом не было «запаривания» капиллярной структуры, ее, как указано выше для обычных тепловых труб, необходимо выполнять с уменьшением размера пор в направлении корпуса. Для гарантированного обеспечения процесса впитывания перегрев жидкости на соответствующей поверхности должен быть меньше величины, даваемой формулой (14.86). При пользовании зависимостью (14.80) в рассматриваемом случае в качестве  $R_{\text{эф}}$

берут  $R_{\text{max}}$ .

Математические модели процессов в контурной тепловой трубе могут касаться всей трубы или отдельных ее элементов, находясь на разных уровнях сложности. Приведем некоторые из них.

Вначале рассмотрим простую модель для трубы в целом, основанную на балансе давлений (14.81), внося некоторые коррективы в приведенные ранее соотношения для расчета величин

$\Delta p_{\text{ж}}$  и  $\Delta p_{\text{п}}$  согласно особенностям конструкции контурных тепловых труб.

Учитываем только вязкостные составляющие изменения давления в фитиле и трубопроводах (верхние индексы соответственно «ф» и «т») как для жидкости, так и для пара:

$$\Delta p_j^{\text{ф}} = \dot{m} v_j^{\text{ф}} \delta_j^{\text{ф}} / (K_j^{\text{ф}} F_{\text{и}}); \quad (14.92)$$

$$\Delta p_j^{\text{т}} = 128 \dot{m} v_j^{\text{т}} l_j^{\text{т}} / (\pi d_j^4). \quad (14.93)$$

Здесь  $\dot{m}$  – массовый расход охладителя;  $v$  – кинематическая вязкость фазы на рассматриваемом участке;  $\delta^{\text{ф}}$  и  $K^{\text{ф}}$  – толщина и проницаемость фитиля по соответствующей фазе;  $F_{\text{и}}$  – площадь подвода теплоты в испарителе;  $l$  и  $d$  – длина и диаметр трубопроводов; индекс «j» имеет значения «ж» и «п» для жидкости и пара соответственно.

Если принять  $\Delta p_{\text{п}}^{\text{ф}} = \Delta p_{\text{ж}}^{\text{ф}}$ ,  $l_{\text{п}}^{\text{т}} = l_{\text{ж}}^{\text{т}} = l$ ,  $K_{\text{ж}}^{\text{ф}} = 0,015 R_{\text{эф}}^2$ , то с учетом соотношения  $\dot{m} = Q/r$  из гидродинамического условия (14.81) получается такое выражение для *теплотранспортной способности* контурной тепловой трубы:

$$Ql = \frac{\sigma \cos \theta / R_{\text{эф}}}{(64/r)(A + B/R_{\text{эф}}^2)}, \quad (14.94)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения;  $\theta$  – угол смачивания;  $r$  – удельная теплота фазового перехода; величины  $A$  и  $B$  выглядят следующим образом:  $A = v_{\text{ж}}^{\text{т}} / (\pi d_{\text{ж}}^4) + v_{\text{п}}^{\text{т}} / (\pi d_{\text{п}}^4)$ ;  $B = 1,04 v_{\text{ж}}^{\text{ф}} \delta_{\text{ж}}^{\text{ф}} / (l F_{\text{и}})$ .

Выражение (14.94) соответствует изотропной капиллярной структуре, оно позволяет найти оптимальное значение эффективного радиуса пор  $R_{\text{эф}}$ . Согласно (14.94), максимум  $Ql$  получается при

$$R_{\text{эф}}^{\text{opt}} = \sqrt{B/A}.$$

Аналогично можно найти теплотранспортную способность двухфазного термоциркуляционного контура с капиллярным насосом в испарителе для случая переменного по толщине  $X$  фитиля значения радиуса пор. Здесь величина  $B$  оказывается домноженной

на коэффициент  $\varepsilon$ , введенный как  $\varepsilon = \left( R_{\text{эф}}^2 / \delta_{\text{ж}}^\phi \right) \int_0^{\delta_{\text{ж}}^\phi} dx / [R_{\text{п}}^2(x)]$ .

Этим отражено наличие в формуле для  $\Delta p_{\text{ж}}^\phi$  интеграла

$\int_0^{\delta_{\text{ж}}^\phi} dx / [K_{\text{ж}}^\phi(x)]$  вместо отношения  $\delta_{\text{ж}}^\phi / K_{\text{ж}}^\phi$  (корреляцию  $K_{\text{ж}}^\phi$

распространяют на действительный радиус пор  $R_{\text{п}}$ ). Так же

видоизменяется выражение для  $R_{\text{эф}}^{\text{opt}}$ , которое затем позволяет найти оптимальное распределение  $R_{\text{п}}$  по толщине фитиля.

В качестве примера математической модели процессов в испарителе контурной тепловой трубы приведем задачу расчета такого распределения радиуса пор по толщине  $\delta$  фитиля, которое бы препятствовало закипанию жидкости в фитиле.

Из условия равновесия фаз следует, что в порах, находящихся на координате  $x$ , кипение не возникает, если радиус пор  $R_{\text{п}}(x)$  не превышает «порогового» значения

$$R_*(x) = 2\sigma \cos \theta / \{p_{\text{н}}[T(x)] - p(x)\}, \quad (14.95)$$

где  $p_{\text{н}}[T(x)]$  – давление насыщения при температуре  $T(x)$  жидкости, находящейся на координате  $x$ ;  $p(x)$  – давление жидкости на этой координате (последняя отсчитана от поверхности впитывания в сторону корпуса).

Распределение температуры  $T(x)$  можно найти, решив одномерную задачу теплопроводности для смоченного фитиля. Она включает дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \gamma \frac{dT(x)}{dx} = 0$$

и граничные условия вида:  $dT(x)/dx = \gamma(T - T_0)$  при  $x = 0$  и

$T(x) = T_{\text{п}}$  при  $x = \delta$ . Здесь  $\gamma = \dot{m}c_{\text{ж}} / (F_{\text{и}}\lambda_{\text{ф}})$ ,

$T_0 = T_{\text{н}}[p_{\text{н}}(T_{\text{п}}) - \Delta p_{\text{нар}}]$ . Приняты следующие обозначения:

$T_{\text{п}}$  – температура пара;  $c_{\text{ж}}$  – теплоемкость жидкости;  $\lambda_{\text{ф}}$  –

эффективная теплопроводность смоченного фитиля;  $T_H$  и  $p_H$  – температура и давление насыщения;  $\Delta p_{нар} = \Delta p_{п}^T + \Delta p_{ж}^T$  – потери давления в паропроводе и конденсатопроводе (изменение давления в пароотводных каналах фитиля не учтено). Решение задачи имеет вид

$$T(x) = T_0 + (T_{п} - T_0) \exp[\gamma(x - \delta)]. \quad (14.96)$$

Используя эту зависимость, а также условие (14.95), уравнение движения жидкости в фитиле

$$\frac{dp(x)}{dx} = - \frac{\dot{m} v_{ж}(T_{п})}{F_{и} K(x)} \quad (14.97)$$

и корреляцию  $K(x) = 0,015 R_{п}^2(x)$ , получают искомое распределение радиуса пор в виде

$$R_{п}(x) = R_{эф} \frac{\exp(\gamma\delta) - 1}{\exp(\gamma x) - 1} \quad (14.98)$$

с учетом следующих граничных условий:  $p(x) = p_H(T_0)$  при  $x = 0$  и  $R_{п}(x) = R_{эф} = 2\sigma \cos \theta / (\Delta p^T + \Delta p^\Phi)$ .

При этом

$$\Delta p^\Phi = 133 v_{ж}(T_{п}) \frac{\dot{m} \delta}{F_{и} o} \int \frac{[\exp(\gamma x) - 1]^2 dx}{[\exp(\gamma\delta) - 1]^2 R_{эф}^2}, \quad (14.99)$$

и введенная ранее поправка в формулу (14.94) принимает вид

$$\varepsilon = \frac{2\gamma\delta + \exp(2\gamma\delta) - 4\exp(\gamma\delta) + 3}{2\gamma\delta[\exp(\gamma\delta) - 1]^2}. \quad (14.100)$$

Моделью более высокого уровня сложности для процессов в испарителе является двумерная задача о распределении температуры в фитиле, постановка которой опирается на концепцию «двухфазного теплового слоя». Под ним понимают прилегающую к поверхности нагрева зону (толщиной  $\delta_{дтс}$ ) «ребра» фитиля, в пределах которой происходит устойчивое кипение, такое, что мелкие поры заполнены жидкостью, а крупные заняты паром. Потoki теплоты и жидкости в этом слое направлены по нормали к поверхности нагрева, а поток пара – вдоль нее к пароотводным каналам, расположенным между ребрами фитиля.

Математическая модель двухфазного теплового слоя включает: уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial p_{\text{ж}}}{\partial x} = -(q/r)v_{\text{ж}} \frac{x}{K_{\text{ж}} \delta_{\text{дтс}}}; \quad (14.101)$$

уравнение движения пара

$$\frac{\partial p_{\text{п}}}{\partial y} = -(q/r)v_{\text{п}} \frac{y}{K_{\text{п}} \delta_{\text{дтс}}}; \quad (14.102)$$

уравнение переноса теплоты

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{\lambda_{\text{дтс}} \delta_{\text{дтс}}} = 0; \quad (14.103)$$

условие равновесия фаз

$$\frac{\partial}{\partial x} [p_{\text{п}}(x, 0) - p_{\text{ж}}(x, 0)] = -\frac{2\sigma \cos \theta}{R_*^2(x)} \frac{\partial R_*}{\partial x}; \quad (14.104)$$

выражение баланса давлений

$$\Delta p_{\text{нар}} + \Delta p_{\text{ж}}^{\phi} + \Delta p_{\text{п}}^{\phi} = 2\sigma \cos \theta / R_* . \quad (14.105)$$

В последнем соотношении  $\Delta p_{\text{ж}}^{\phi} = \int_0^{\delta_{\text{дтс}}} (\partial p_{\text{ж}} / \partial x) dx$ ;

$$\Delta p_{\text{п}}^{\phi} = - \int_0^{\epsilon/2} (\partial p_{\text{п}} / \partial y) dy .$$

Эту систему уравнений дополняют условием  $p_{\text{п}}(x, 0) = p_{\text{н}}[T(x)]$  и выражениями для проницаемости фитиля по фазам:

$$K_{\text{ж}} = \frac{1}{\Phi[R_*]} \int_{R_{\text{мин}}}^{R_*(x)} R_{\text{п}}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R_{\text{п}}} dR_{\text{п}} \bigg/ \int_{R_{\text{мин}}}^{R_{\text{макс}}} R_{\text{п}}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R_{\text{п}}} dR_{\text{п}}, \quad (14.106)$$

$$K_{\text{п}} = \frac{1}{1 - \Phi[R_*]} \int_{R_*}^{R_{\text{макс}}} R_{\text{п}}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R_{\text{п}}} dR_{\text{п}} \bigg/ \int_{R_{\text{мин}}}^{R_{\text{макс}}} R_{\text{п}}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R_{\text{п}}} dR_{\text{п}} . \quad (14.107)$$

Используют следующие граничные условия: для уравнения переноса энергии  $\partial T / \partial x = -q / \lambda_{\text{дтс}}$  при  $x = 0$  и  $T = T_{\text{п}}$  при  $x = \delta_{\text{дтс}}$ ;

для условия равновесия фаз:  $R_*(\delta_{\text{дтс}}) = R'$ , если  $R' < R_{\text{макс}}$  и

$R_*(\delta_{\text{дтс}}) = R_{\text{макс}}$ , если  $R' > R_{\text{макс}}$ , причем  $R' = 2\sigma \cos \theta / \Delta p_{\text{нар}}$ .

Выше приняты такие обозначения:  $q$  – плотность теплового потока на всей поверхности нагрева,  $\lambda_{\text{дтс}}$  – эквивалентный коэффициент теплопроводности двухфазного теплового слоя,  $R_*$  – пороговый радиус пор (жидкость в порах с таким радиусом начинает закипать),  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$  – минимальный и максимальный радиусы пор,  $\Phi$  – интегральная функция распределения пор. Начало координат помещено на поверхности нагрева по средней линии ребра фитиля, так что  $X$  отсчитывают вглубь двухфазного теплового слоя, а  $y$  – к пароотводному каналу ( $0 \leq y \leq \delta/2$ , где  $\delta$  – ширина ребра).

Решение записанной системы уравнений позволяет найти толщину двухфазного теплового слоя  $\delta_{\text{дтс}}$ , по которой вычисляют коэффициент теплоотдачи при кипении в фитиле:

$$\alpha_{\text{кип}} = (\lambda_{\text{дтс}} / \delta_{\text{дтс}})(\delta/t), \quad (14.108)$$

где  $t$  – шаг ребер (напомним, что плотность теплового потока отнесена ко всей площади поверхности нагрева).

Математическую модель процессов в конденсаторе (чаще всего гладкостенном) контурных тепловых труб сводят обычно к задаче о пленочной конденсации движущегося пара в плоской щели. Примером может быть следующая система безразмерных уравнений:

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{3A}{\delta^2} (2\text{Re}_{\text{ж}} - \text{Re}_{\text{гр}}) - \frac{d\bar{p}_{\text{H}}}{d\bar{x}} - \frac{A}{2} \text{Ga}; \quad (14.109)$$

$$\frac{d\bar{p}_{\text{H}}}{d\bar{x}} = \frac{1,5A\bar{\mu}_{\text{II}}}{(0,5 - \bar{\delta})^2} \left( \text{Re}_{\text{II}} \frac{\bar{\mu}_{\text{II}}}{\bar{\rho}_{\text{II}}} - \text{Re}_{\text{гр}} \right); \quad (14.110)$$

$$\frac{d^2\bar{\delta}}{d\bar{x}^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} \right)^2} \left[ 2\bar{p} - \frac{A}{\bar{\rho}_{\text{II}}} \left( \frac{d(\bar{\delta}\text{Re}_{\text{ж}})}{d\bar{x}} \right)^2 \right]; \quad (14.111)$$

$$\frac{d\text{Re}_{\text{ж}}}{d\bar{x}} = \frac{\overline{\Delta T}_{\text{WH}}}{\delta^2} \sqrt{1 + \left( \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} \right)^2} - \frac{\text{Re}_{\text{ж}}}{\delta} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}}; \quad (14.112)$$

$$\frac{d\text{Re}_{\text{II}}}{d\bar{x}} = \frac{1}{0,5 - \bar{\delta}} \left( \text{Re}_{\text{ж}} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} - \frac{\overline{\Delta T}_{\text{WH}}}{\bar{\mu}_{\text{II}}\bar{\delta}} \right); \quad (14.113)$$

$$\frac{d\overline{\Delta T_{WH}}}{d\bar{x}} = -2A \frac{\sigma^2}{r\mu_{ж}^2} \left( \frac{1}{\bar{\rho}_{\Pi}} - 1 \right) \left( \overline{\Delta T_{WH}} + \frac{\lambda_{ж} T_w}{\mu_{ж} r} \right) \frac{d\bar{p}_H}{d\bar{x}}. \quad (14.114)$$

Она содержит: уравнение (14.109) движения пленки вдоль щели (в направлении оси X) под действием сил давления, тяжести, поверхностного натяжения и трения (на стенке и на поверхности взаимодействия с паром); уравнение (14.110) спутного движения пара под действием сил давления и трения; уравнение (14.111) баланса сил в направлении, перпендикулярном поверхности пленки; комбинированное уравнение (14.112) неразрывности, энергии и теплопередачи для пленки; уравнение (14.113) неразрывности для пара и уравнение (14.114), которое выражает изменение безразмерного температурного напора  $\overline{\Delta T_{WH}} = (T_H - T_w) \lambda_{ж} / (r \mu_{ж})$  согласно уравнению Клапейрона – Клаузиуса.

Здесь принято, что поперечный (по оси Y) перенос теплоты в пленке толщиной  $\delta$  осуществляется только теплопроводностью; на границе раздела одинаковы как скорости фаз, так и касательные напряжения. Критерии  $Re_{ж} = \rho_{ж} \tilde{w}_{ж} h / \mu_{ж}$  и  $Re_{\Pi} = \rho_{\Pi} \tilde{w}_{\Pi} h / \mu_{\Pi}$  подсчитаны по ширине щели  $h$  и средним в сечении скоростям жидкости  $\tilde{w}_{ж}$  и пара  $\tilde{w}_{\Pi}$ . При введении их использованы решения для напорного течения Куэтта (жидкость) и плоского ламинарного течения (пар).

Другие безразмерные величины выглядят так:  $\bar{x} = x/h$ ;  $\bar{\delta} = \delta/h$ ;  $\bar{\rho}_{\Pi} = \rho_{\Pi} / \rho_{ж}$ ;  $\bar{\mu}_{\Pi} = \mu_{\Pi} / \mu_{ж}$ ;  $\bar{p} = 0,5h(p_{\Pi} - p_{ж}) / \sigma$ ;  $\bar{p}_H = 0,5h(p_{\Pi,ВХ} - p_{\Pi}) / \sigma$ ;  $A = \mu_{ж}^2 / (\rho_{ж} \sigma h)$ ;  $Nu = \tilde{\alpha} h / \lambda$ ,  $Re_{гр} = \rho_{ж} w_{\delta} h / \mu_{ж}$ ;  $Ga = \rho_{ж}^2 g h^3 / \mu_{ж}^2$ . Здесь  $p_{\Pi,ВХ}$  – давление пара на входе в щель,  $\tilde{\alpha}$  – среднее по длине участка конденсации значение коэффициента теплоотдачи.

Систему записанных уравнений решают численно при следующих граничных условиях: на «верхней» границе ( $\bar{x} = 0$ , входное сечение щели) берут  $Re_{ж} = 0$ ,  $\bar{\delta} = \bar{\delta}_{ВХ}$ ,  $\bar{p}_H = 0$ ,  $\overline{\Delta T_{WH}} = \overline{\Delta T_{WH,ВХ}}$ ; на «нижней» границе ( $\bar{x} = \bar{x}_1$ , где  $d\bar{\delta}/d\bar{x} = 1$ )  $Re_{\Pi} = 0$ ,  $\bar{p} + \bar{p}_H = \bar{p}_{\Sigma}$ , где величина  $\bar{p}_{\Sigma}$  показывает, во сколько раз перепад

давления в щели на участке конденсации больше капиллярного давления при радиусе кривизны  $h/2$ .

Специфическим элементом контурной тепловой трубы есть компенсационная полость (на рис. 14.11 она объединена конструктивно с испарителем). Основная задача ее – надежное смачивание фитиля на всех режимах работы трубы. Кроме того, эта полость выполняет роль сепаратора пара и жидкости при нестационарной работе (режимы запуска и регулирования мощности), когда в конденсатопроводе может перемещаться двухфазная среда.

Математическая модель компенсационной полости должна отражать тепловое состояние теплоносителя и связывать объем полости с количеством жидкости, выталкиваемой из контура при самом неблагоприятном распределении теплоносителя.

Обычно объем компенсационной полости принимают равным  $V_{\text{кп}} = V_{\text{пт}} + \varepsilon V_{\text{к}}$ , где  $V_{\text{пт}}$  и  $V_{\text{к}}$  – объемы парового тракта и конденсатора,  $\varepsilon$  – максимальная степень осушения конденсатора. Предложены также формулы для  $V_{\text{кп}}$ , учитывающие еще и увеличение объема жидкости вследствие нагрева.

Что касается теплового состояния рабочей среды в компенсационной полости, то чаще всего полость считают термически равновесной системой, температура которой определяется давлением в ней:  $T_{\text{кп}} = T_{\text{н}}(p_{\text{кп}})$ . Некоторые авторы для нахождения температуры компенсационной полости используют уравнение теплового баланса  $\dot{m}c_{\text{ж}}(T_{\text{кп}} - T_{\text{к}}) = Q$ . В более сложных моделях может приниматься во внимание неоднородность термического поля в компенсационной полости. Она определяется, прежде всего, теплообменом полости с испарителем, а также термическим взаимодействием между полостью и входящей в нее жидкостью (теплообмен с окружающей средой имеет меньшее значение).

### Библиографический список

- Беляев Н.М. Основы теплопередачи. – К.: Вища шк., 1989. – 343 с.  
Блох А.Г. Основы теплообмена излучением. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 331 с.  
Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. – М.: Изд. иностр. лит., 1958. – 452 с.  
Жуковский В.С. Основы теории теплопередачи. – Л.: Энергия, 1969. – 224 с.  
Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1975. – 488 с.

- Кэйс В.М. Конвективный тепло- и массообмен. – М.: Энергия, 1972. – 488 с.
- Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979. – 416 с.
- Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.
- Мак Адамс В.Х. Теплопередача. – М.: Metallургия, 1961. – 686 с.
- Михеев М.А. Основы теплопередачи. – М.: Госэнергоиздат, 1956. – 392 с.
- Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике/ Под ред. В.К. Кошкина. – М.: Машиностроение, 1975. – 623 с.
- Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. – М.: Атомиздат, 1974. – 403 с.
- Теория тепломассообмена / Под ред. А.И. Леонтьева. – М.: Высш. шк., 1979. – 495 с.
- Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 680 с.
- Юдаев Б.Н. Теплопередача. – М.: Высш. шк., 1981. – 319 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 11.	ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....	3
11.1.	Закон Фурье.....	3
11.2.	Краевая задача теплопроводности.....	5
11.3.	Простейшие математические модели процессов стационарной теплопроводности.....	8
11.4.	Двумерное поле температуры (плоская задача).....	13
11.5.	Модель контактной теплопроводности.....	15
Глава 12.	СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА.....	20
12.1.	Закон Ньютона – Рихмана.....	20
12.2.	Подобие и моделирование процессов конвективного теплообмена.....	24
12.3.	Модели типичных процессов конвекции в однофазной среде.....	32
12.4.	Модели процессов теплообмена при фазовых переходах.....	41
Глава 13.	МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ.....	49
13.1.	Закон Стефана – Больцмана.....	49
13.2.	Лучистый теплообмен между поверхностями твердых тел.....	52
13.3.	Теплообмен излучением между газом и оболочкой...	55
Глава 14.	МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА.....	58
14.1.	Передача теплоты через стенку.....	58
14.2.	Поле температуры в теле с источниками теплоты.....	63
14.3.	Распределение температуры в теплоотдающих стержнях и ребрах.....	69
14.4.	Нестационарная теплопроводность.....	77
14.5.	Методы решения задач тепловой защиты.....	85
14.6.	Основы расчета рекуперативных теплообменников...	99
14.7.	Модели процессов в термоциркуляционных контурах.....	103
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	125

Блинков Владимир Николаевич  
Горбенко Геннадий Александрович  
Костиков Андрей Олегович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ТЕПЛОТЕХНИКИ

Часть 3. Основы теплопередачи в объектах  
аэрокосмической техники

Редактор Е.А. Александрова

Св. план, 2006

Подписано в печать

Формат 60x84 1/16. Бум. офс. №2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 7.1 Уч.-изд. л. 8.00. Т. 100 экз. Заказ .

Цена свободная

---

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского

«Харьковский авиационный институт»

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Издательский центр "ХАИ"

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)