

В.Н. Блинков, Г.А. Горбенко, А.О. Костиков

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ТЕПЛОТЕХНИКИ**

**Часть 2. Основы гидрогазодинамики объектов
аэрокосмической техники**

2004

Министерство образования и науки Украины
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

75-летию ХАИ посвящается

В.Н. Блинков, Г.А. Горбенко, А.О. Костиков

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ТЕПЛОТЕХНИКИ**

**Часть 2. Основы гидрогазодинамики объектов
аэрокосмической техники**

Конспект лекций

Харьков «ХАИ» 2004

УДК 621.1.016.7: 532.5

Теоретические основы аэрокосмической теплотехники. Ч. 2. Основы гидрогазодинамики объектов аэрокосмической техники /В.Н. Блинков, Г.А. Горбенко, А.О. Костиков. – Конспект лекций. - Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2004. - 133 с.

Представлены содержательная и математическая модели континуума, фундаментальные законы и уравнения гидрогазодинамики. Рассмотрены одномерные и двумерные модели течений жидкости и газа применительно к задачам расчета двигателей, энергоустановок и систем обеспечения теплового режима летательных аппаратов.

Для студентов авиационных и ракетно-космических специальностей высших учебных заведений.

Ил. 42. Библиогр.: 18 назв.

Рецензенты: акад. НАН Украины Ю.М. Мацевитый,
д-р техн. наук, проф. Э.Г. Братута

© Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт», 2004 г.

Блинков Владимир Николаевич
Горбенко Геннадий Александрович
Костиков Андрей Олегович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ТЕПЛОТЕХНИКИ

Часть 2. Основы гидрогазодинамики объектов
аэрокосмической техники

Редактор Е.А. Александрова

Св. план, 2004

Подписано в печать 28.10.2004

Формат 60x84 1/16. Бум. офс. №2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 7,3. Уч.-изд. л. 8,31. Т. 100 экз. Заказ 454.

Цена свободная

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского

«Харьковский авиационный институт»

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Издательский центр "ХАИ"

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Глава 6. СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ КОНТИНУУМА

6.1. Гипотеза сплошности

6.1.1. Понятие сплошной среды (континуума)

При математическом моделировании течения жидкостей и газов их рассматривают как гипотетическую *сплошную среду*, свойства и характеристики движения которой описывают феноменологически вводимыми макроскопическими параметрами, *непрерывно* распределенными в пространстве.

Например, информацию о массе в такой содержательной модели дает поле плотности $\rho = \rho(x, y, z)$. Значение параметра ρ в *точке пространства* с декартовыми координатами X, Y, Z естественно установить предельным переходом

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad (6.1)$$

где Δm – масса в объеме ΔV , охватывающем рассматриваемую точку. Однако формула (6.1) дает однозначное значение плотности только при непрерывном распределении массы в пространстве. В случае реального дискретного распределения (жидкости и газы состоят из молекул) величина плотности однозначна лишь до тех пор, пока в объеме ΔV остается достаточно много молекул. При $\Delta V \sim l_{с.п}^3$, где $l_{с.п}$ – длина свободного пробега молекулы, значение ρ становится неустойчивым, что делает невозможным его применение при использовании математического аппарата непрерывных функций. Это же касается и других макроскопических параметров.

Поэтому для дискретных систем предельный переход берут в виде $\Delta V \rightarrow \Delta V_{эл}$, где элементарный объем $\Delta V_{эл}$ достаточен для того, чтобы находящееся в нем количество частиц обеспечивало *статистически устойчивое* значение параметра. С другой стороны, величина $\Delta V_{эл}$ должна быть столь мала по сравнению с характерным объемом расчетной области, чтобы элементарный объем можно было рассматривать как точку пространства.

Если оба ограничения выполняются одновременно, «замещение» реальной дискретной среды воображаемой сплошной (*континуумом*) возможно. Численно *границу применимости гипотезы сплошности*

указывают посредством *числа Кнудсена* $Kn = l_{c.п} / l_{x.з}$ – отношения длины свободного пробега молекул $l_{c.п}$ к характерному размеру задачи $l_{x.з}$. Обычно считают, что указанная содержательная модель жидкостей и газов применима, если $Kn < 0,01$. Для течений в объектах теплотехники это условие выполняется «с запасом». Например, при нормальных атмосферных условиях длина свободного пробега молекул газа составляет 6×10^{-5} мм, а число молекул в одном кубическом миллиметре равно $2,7 \times 10^{16}$.

6.1.2. Виды характеристик континуума

При построении математической теории макроскопического движения жидкостей и газов используют фундаментальные законы механики и термодинамики. Поэтому для описания движения и состояния континуума привлекают механические и термодинамические характеристики.

К числу *механических* характеристик относятся:

- параметры движения кинематические и динамические;
- количество механического взаимодействия (работа);
- уравнение деформации.

Характеристики первых двух групп заимствованы из теоретической механики. Особенности применения их к сплошной среде рассмотрены далее. Введение дополнительной характеристики (уравнения деформации) связано с тем, что континуум при движении подвергается деформации. Уравнение деформации также будет рассмотрено в дальнейшем.

Термодинамическими характеристиками являются:

- параметры состояния термические и калорические;
- количество термического взаимодействия (теплота);
- уравнение состояния.

Все эти характеристики заимствованы из классической термодинамики, но здесь их применяют к элементарному, а не к конечному объему. Иначе говоря, в гидрогазодинамике использована концепция локального термодинамического равновесия.

Однако механических и термодинамических характеристик недостаточно для построения теории движения сплошной среды. Дело в том, что на макродвижение влияет самопроизвольный перенос массы, импульса, энергии, обусловленный непрерывным хаотическим перемещением молекул. Для описания его в континуумном представлении указанным процессам ставят в соответствие *универсальный закон переноса*

са, устанавливающий, что молекулярные потоки пропорциональны градиентам макроскопических потенциалов. Частными случаями этого закона применительно к переносу массы, импульса, энергии являются законы Фика, Ньютона, Фурье соответственно:

$$\dot{m}_{d_n} = -d \frac{\partial C}{\partial n}, \quad (6.2)$$

$$\tau_n = \mu \frac{\partial w}{\partial n}, \quad (6.3)$$

$$q_n = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (6.4)$$

Здесь \dot{m}_{d_n} – плотность диффузионного потока массы, связанного с неоднородностью состава среды; C – концентрация диффундирующего вещества (компоненты); τ_n – касательное напряжение; w – скорость макроскопического движения; q_n – плотность потока тепловой энергии; T – температура среды; n – нормаль к поверхности, через которую происходит перенос (рис. 6.1).

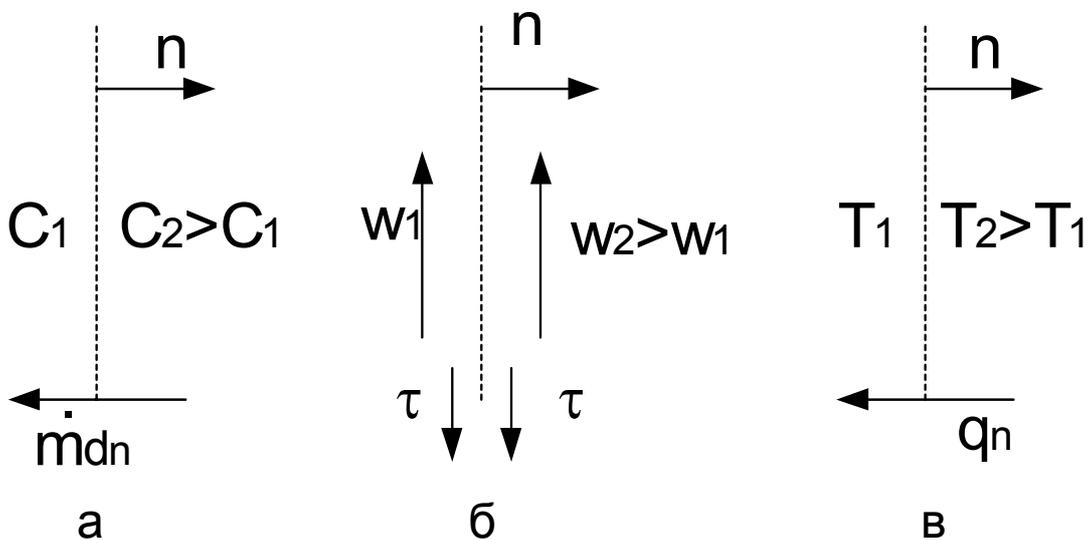


Рис. 6.1

Входящие в уравнения (6.2) – (6.4) коэффициенты диффузии d , вязкости μ , теплопроводности λ рассматривают как свойства континуума, то есть как его макроскопические параметры. Они образуют дополнительную группу *переносных* характеристик сплошной среды.

6.1.3. Основные модели континуума

Уравнение деформации, состояния и параметры переноса отражают те особенности реальных тел, которые обуславливают их различное поведение при подчинении одинаковым фундаментальным законам и при совпадающих внешних условиях. Поэтому указанные характеристики можно принять в качестве критериев при отнесении реальных тел к тем или иным классам сплошных сред. Термин «класс» идентифицируют с математической моделью, под которой понимают конкретный вид упомянутых уравнений и соотношений для переносных параметров.

Уравнение деформации позволяет «отделить» жидкости и газы от твердых тел (для них тоже справедлива гипотеза сплошности).

Твердые тела при малых деформациях удовлетворяют *закону Гука*: здесь напряжения пропорциональны деформациям. Например, для простейшего плоского сдвига (рис. 6.2) имеем

$$\tau = G\gamma, \quad (6.5)$$

где τ – касательное напряжение, G – модуль упругости второго рода, γ – угловая деформация.

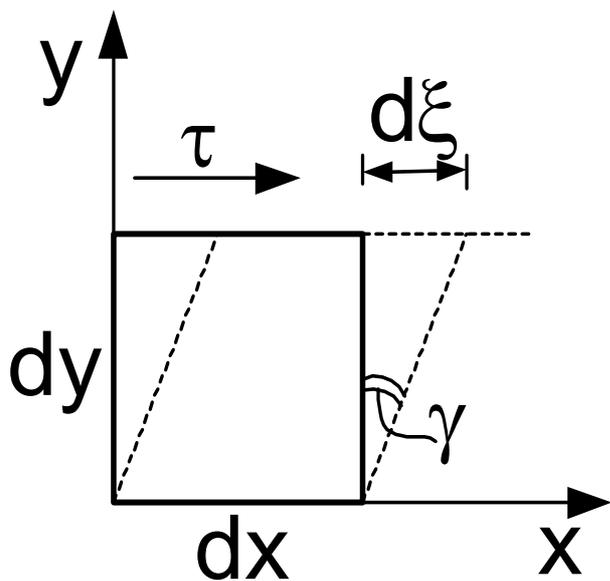


Рис. 6.2

Жидкости и газы (*нетвердые* тела) при малых деформациях подчиняются *закону Ньютона*: у них напряжения пропорциональны скорости деформации. Так, для того же сдвига здесь будет

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt}, \quad (6.6)$$

где величина μ совпадает с коэффициентом пропорциональности в уравнении (6.3), поскольку оно тождественно последнему соотношению. Действительно, применяя зависимость (6.3) к деформации сдвига (рис. 6.2), имеем

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy} = \mu \frac{d}{dy} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dy} \right) = \mu \frac{d\gamma}{dt},$$

так как при малых деформациях $\gamma \approx \text{tg}\gamma = d\xi / dy$.

Поскольку для нетвердых тел напряжения пропорциональны не самой деформации, а ее скорости, здесь можно получить сколь угодно большую деформацию действием сколь угодно малой силы. Поэтому нетвердые тела отличает легкая подвижность, или *текучесть*, вследствие чего такие тела называют еще текучими.

Опыт показывает, что конкретное тело нельзя однозначно отнести к модели твердых или текучих, не учитывая обстоятельства его деформирования. Чем выше скорость деформации, тем больше вероятность того, что тело будет деформироваться по закону Гука. В обычных условиях скорости деформации таковы, что жидкости и газы ведут себя как текучие среды.

В пределах модели текучего континуума жидкости и газы отличаются *степенью сжимаемости*, то есть способностью менять величину объема при изменении давления.

Сжимаемость континуума можно выразить посредством уравнения состояния. Для жидкостей принимают $\rho = \text{const}$, для газов $\rho = \text{var}$. Степень сжимаемости характеризуют также *модулем упругости*

$$\varepsilon = -\frac{dp}{dv/v} = \rho \frac{dp}{d\rho}, \quad (6.7)$$

или обратной величиной – *коэффициентом сжимаемости* $\chi = 1/\varepsilon$. В обычных условиях у жидкостей значение χ мало отличается от нуля, для газов оно конечно.

Отметим, что проявлением сжимаемости среды следует считать изменение ее плотности именно в результате изменения давления, а не вследствие переменности температуры. Последнее оценивают коэффициентом температурного расширения

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p. \quad (6.8)$$

Чтобы «отстроиться» от влияния температуры на плотность при оценке сжимаемости среды, величины ε и χ надо вычислять при $T = \text{const}$. С учетом этого уравнения состояния $\rho = \text{const}$ или $\rho = \text{var}$, применяемые в качестве критериев несжимаемости или сжимаемости континуума, надо трактовать как выполняющиеся в элементарном объеме среды при неизменности его температуры.

Опыт показывает, что одна и та же среда может вести себя как сжимаемая и несжимаемая в зависимости от величины отношения скорости течения среды W к скорости распространения слабых возмущений в

ней a . Например, при $w/a \leq 0,2$ ошибка вычисления давления на поверхности тела, обтекаемого воздухом, по формулам для несжимаемой среды не превысит 1%.

Поэтому при отнесении конкретного континуума к классам несжимаемых или сжимаемых сред необходимо опираться именно на степень проявления его сжимаемости в данных механических и термодинамических условиях движения. В дальнейшем будем называть *жидкостью* несжимаемую текучую среду и *газом* сжимаемую, независимо от реального физического строения среды, идентифицируя жидкость и газ математическими моделями $\rho = \text{const}$ и $\rho = \text{var}$ соответственно.

В пределах моделей жидкости и газа выделяют подмодели по виду зависимостей коэффициентов переноса от термодинамических параметров T, p . Эти подмодели будем указывать при решении конкретных задач, но во всех случаях далее принято $d = 0$ (рассматриваем только однородные по составу континуумы).

6.2. Кинематические характеристики континуума

6.2.1. Вектор скорости

Вектор скорости является основным кинематическим параметром при описании движения по *методу Эйлера*, когда наблюдают за изменением во времени параметров среды во всех *точках пространства*. Под точкой понимают малый объем пространства, равный элементарному объему ΔV_3 (см. подразд. 6.1.1). По Эйлеру, движение континуума задано, если известна векторная функция $\vec{w} = \vec{w}(\vec{r}, t)$, или эквивалентная ей система $w_i = w_i(x_j, t)$, $i, j = 1, 2, 3$. Здесь \vec{r} – радиус-вектор рассматриваемой точки, X_j – декартовы координаты (проекции векторов на оси помечены номером оси). В случае, когда время t не входит явно в записанные выше функции, течение именуют *стационарным*.

Геометрический образ течения в методе Эйлера дает *линия тока*: в каждой точке ее касательная совпадает с направлением вектора скорости. Линии тока, построенные для разных моментов времени, совпадают между собой лишь при стационарном движении. В этом случае они являются и траекториями (по ним движутся элементарные объемы континуума).

По определению, уравнение линии тока имеет вид

$$d\vec{r} \times \vec{w} = 0, \quad (6.9)$$

или

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z}. \quad (6.10)$$

Поверхность, образованная совокупностью линий тока, проведенных через все точки замкнутого, себя не пересекающего контура, называют *трубкой тока*. Часть континуума, расположенную внутри трубки, именуют *стружкой*. Ее характеризуют интенсивностью

$$\dot{V} = \int_{A_c} \vec{n} \cdot \vec{w} dA, \quad (6.11)$$

представляющей собой поток вектора скорости сквозь односвязную поверхность A_c , стягиваемую контуром C , через точки которого проведены линии тока, образующие трубку. Интенсивность стружки называют еще *объемным расходом* среды в трубке тока.

6.2.2. Вектор ускорения

По определению, он является производной по времени от вектора скорости. Найдем ее, учитывая, что скорость в методе Эйлера есть функцией нескольких переменных, полный дифференциал которой

$$d\vec{w} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} dt.$$

Тогда полная производная

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + w_x \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vec{w}}{\partial z},$$

или

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial \vec{w}}{\partial x_j}, \quad (6.12)$$

где знаком $\vec{\nabla}$ обозначен векторный дифференциальный оператор Гамильтона

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (6.13)$$

Выражение (6.12) можно рассматривать как результат применения к вектору скорости оператора субстанциональной (полной) производной

$$\frac{d...}{dt} = \frac{\partial...}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})..., \quad (6.14)$$

справедливого для любого параметра движущегося континуума. Первое слагаемое оператора (6.14) называют локальной (местной) производной (существует при нестационарном поле параметра), второе – конвективной (переносной) производной (она определяется неоднородностью этого поля и наличием движения среды).

6.2.3. Тензор скоростей деформаций

Характеризует деформационную часть движения текучего континуума. Она связана с неоднородностью поля скорости, которую в окрестности произвольной точки пространства можно выразить совокупностью девяти частных производных компонент скорости по координатным осям. Ее обычно представляют суммой трех матриц (тензоров второго ранга):

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{\partial w_x}{\partial x} & \frac{\partial w_y}{\partial x} & \frac{\partial w_z}{\partial x} \\ \frac{\partial w_x}{\partial y} & \frac{\partial w_y}{\partial y} & \frac{\partial w_z}{\partial y} \\ \frac{\partial w_x}{\partial z} & \frac{\partial w_y}{\partial z} & \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial w_x}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial w_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) & 0 \end{vmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) & 0 \end{vmatrix}.$$

Компоненты первой из суммируемых матриц есть скорости относительных линейных деформаций дифференциально малого элемента среды по соответствующим осям. Поэтому в целом она характеризует *скорость изменения величины объема элемента*.

Компоненты второй матрицы разложения представляют собой меры скорости деформации чистого сдвига упомянутого элемента среды в соответствующих плоскостях. Это следует из рис. 6.3, отвечающего исходной матрице в случае, когда $\partial w_y / \partial x = \partial w_x / \partial y$, а все другие компоненты равны нулю. Здесь элемент подвергается деформации чистого сдвига в плоскости XY (происходит такой поворот граней dx и dy , что диагональ сохраняет свою ориентацию в пространстве).

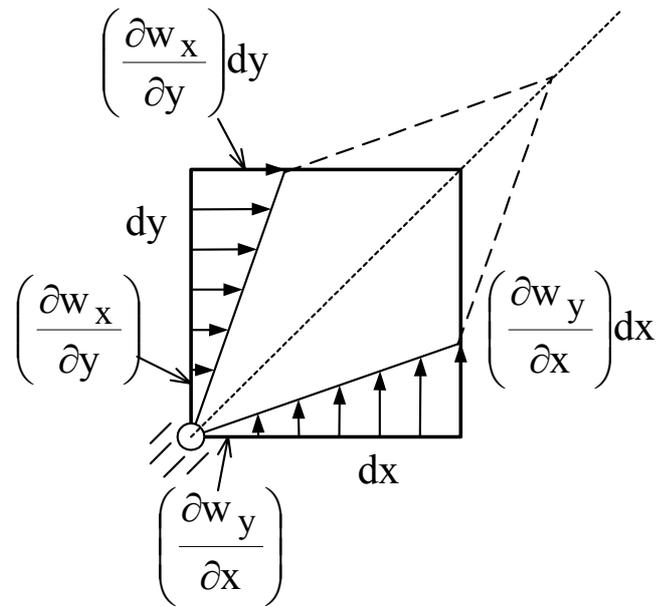
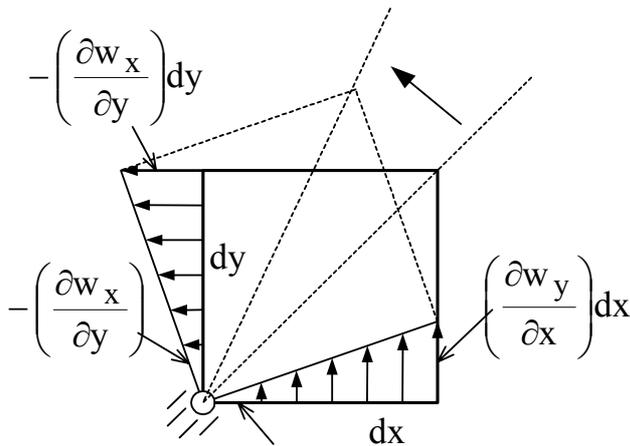


Рис. 6.3

Если в исходной матрице $(\partial w_y / \partial x) = -(\partial w_x / \partial y)$, а остальные компоненты нулевые, то согласно рис. 6.4 происходит поворот элемента (без его деформации) относительно оси Z на угол $\partial w_y / \partial x$ за секунду. Угловую скорость поворота можно записать как $(\partial w_y / \partial x - \partial w_x / \partial y) / 2$.

Следовательно, компоненты третьей из суммируемых матриц равны



угловым скоростям поворота элемента среды относительно собственных осей X, Y, Z. Тогда матрица в целом характеризует *угловую скорость поворота* элемента относительно собственного мгновенного полюса.

Кроме совершения упомянутых движений, элемент еще перемещается в пространстве поступательно. Поэтому справед-

Рис. 6.4

ливо утверждение, что мгновенная скорость движения дифференциально малой частицы континуума складывается из скорости поступательного переноса собственного мгновенного полюса, скорости вращения относительно него и скорости деформационного движения (растяжение-сжатие плюс чистый сдвиг). Эта теорема принадлежит *Гельмгольцу*.

Поскольку упомянутое вращение присуще и движению абсолютно твердого тела, деформацию текучего континуума характеризует сумма только первых двух матриц записанного разложения:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

называемая *тензором скоростей деформаций*. Этот тензор однозначно определяется неоднородностью поля \vec{W} в окрестности точки пространства, так как в целом он инвариантен к ориентации системы координат.

Инвариантом является и сумма компонент главной диагонали:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w_j}{\partial x_j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w}, \quad (6.16)$$

равная *дивергенции вектора скорости* $\operatorname{div} \vec{w}$. Поэтому она однозначно характеризует скорость изменения величины объема частицы континуума. Следовательно, дивергенция скорости выражает проявление сжимаемости среды (если $\operatorname{div} \vec{w} = 0$, континуум несжимаем).

6.2.4. Ротор и циркуляция скорости

Угловую скорость вращения частиц среды можно характеризовать не только третьей матрицей записанного выше разложения, но и вектором *ротора (вихря) скорости* $\operatorname{rot} \vec{w}$:

$$\vec{i}\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right). \quad (6.17)$$

Действительно, здесь выражения в скобках совпадают с компонентами упомянутой матрицы (кроме множителя $1/2$ у всех компонент и знака «минус» у части из них):

$$\operatorname{rot} \vec{w} = 2\vec{i}\omega_x + 2\vec{j}\omega_y + 2\vec{k}\omega_z = 2\vec{\omega}. \quad (6.18)$$

Геометрический образ поля $\operatorname{rot} \vec{w}(x, y, z, t)$ создает совокупность *вихревых линий*, уравнение которых имеет вид

$$d\vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{w} = 0, \quad (6.19)$$

или

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (6.20)$$

Аналогично подразд. 6.2.1 здесь вводят понятия *вихревой трубки*, *вихревого шнура*, *интенсивности вихревого шнура*. В частности, последней называют поток вектора $\operatorname{rot} \vec{w}$ через односвязную поверхность A_c , стягиваемую контуром C , через точки которого проведены вихревые линии, чья совокупность образует вихревую трубку.

Согласно *теореме Стокса*, интенсивность вихревого шнура $\int_{A_c} \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{w} dA$ равна циркуляции скорости

$$\Gamma_c = \oint_c \vec{w} \cdot d\vec{r} \quad (6.21)$$

по этому контуру. Таким образом, циркуляция скорости может служить характеристикой интенсивности вращательного движения частиц среды в области, охваченной контуром C .

Течение, где $\text{rot } \vec{w} \neq 0$, называют *вихревым*, а при $\text{rot } \vec{w} = 0$ – безвихревым, или *потенциальным*. В последнем случае поле скорости \vec{w} обладает *потенциалом* $\Phi(x, y, z)$, то есть $\vec{w} = \vec{\nabla}\Phi$, или $w_i = \partial\Phi / \partial x_i$ ($i = 1, 2, 3$). Справедливость этих соотношений при $\text{rot } \vec{w} = 0$ подтверждается их подстановкой в формулу (6.17).

6.3. Динамические характеристики сплошной среды

6.3.1. Векторы напряженности сил

В механике континуума имеют дело с *распределенными* силами, которые действуют на каждый элемент объема или поверхности. По этой причине здесь оперируют не столько самими силами (объемными и поверхностными), сколько их напряженностями, которые получают отнесением действующей силы к соответствующему элементу объема или поверхности.

Объемной, или массовой, называют силу, которая действует на объем среды независимо от наличия или отсутствия граничащих с ним объемов среды или твердых тел. *Вектор напряженности* такой силы

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow \Delta m_{\text{эл}}} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m}, \quad (6.22)$$

где $\Delta m_{\text{эл}}$ – масса элементарного объема $\Delta V_{\text{эл}}$ (см. подразд. 6.1.1).

Поскольку объемные силы связаны исключительно с нахождением континуума в силовом поле, вектор $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}, t)$ образует поле и поэтому однозначно характеризует вызванное им напряженное состояние континуума в точке.

Поверхностной именуют силу, которая действует на рассматриваемый объем сплошной среды по поверхности его соприкосновения с твердыми телами или другими объемами среды. Посредством таких сил описывают взаимодействие рассматриваемой части континуума и ее «соседей», которые при этом как бы отбрасывают. Поверхностную силу характеризуют *вектором напряженности*

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow \Delta A_{\text{эл}}} \frac{\Delta \vec{P}_n}{\Delta A_n}. \quad (6.23)$$

Здесь $\Delta A_{\text{эл}}$ – элементарная площадка, соответствующая объему $\Delta V_{\text{эл}}$; индекс n указывает, что \vec{p}_n определен при «работе» с площадкой ΔA_n , ориентация которой в пространстве задана вектором внешней нормали \vec{n} . От этой ориентации зависят векторы \vec{P}_n и \vec{p}_n , хотя последний, будучи получен предельным переходом, является характеристикой поверхностных сил в точке.

Поэтому вектор $\vec{p}_n = \vec{p}_n(\vec{n}, \vec{r}, t)$ не образует поля и не дает однозначной характеристики напряженного состояния континуума в точке (через нее можно провести бесчисленное количество площадок, ориентированных разным образом).

6.3.2. Тензор напряженностей поверхностных сил

Однозначное описание напряженного состояния среды в точке, вызванного действием поверхностных сил, возможно посредством тензора второго ранга.

Покажем это, выделив дифференциально малый объем δV континуума (рис. 6.5). Отбросим остальную среду, заменив ее воздействие поверхностными силами на гранях объема. Напряженность их характеризуем векторами $\vec{p}_n, \vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$, направленными извне (жидкости и газы не выдерживают растягивающих напряжений). Знак \vec{p}_i положитель-

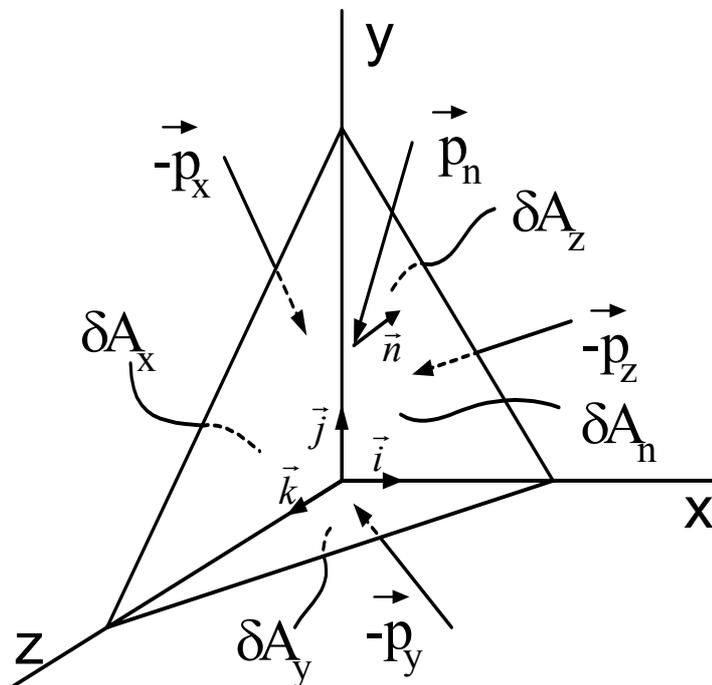


Рис.6.5

лен, если вектор направления, взятый для обозначения ориентации площадки, совпадает с направлением вектора внешней нормали.

По *принципу Даламбера* движение объекта можно рассматривать как относительный покой, если к действующим силам добавить силу инерции, взятую с обратным знаком. Соответствующее условие равновесия объема δV имеет вид

$$\frac{d\vec{w}}{dt} \rho \delta V = \vec{f} \rho \delta V + \vec{p}_n \delta A_n - \vec{p}_x \delta A_x - \vec{p}_y \delta A_y - \vec{p}_z \delta A_z.$$

Если пренебречь величинами третьего порядка малости, получим

$$\vec{p}_n \delta A_n = \vec{p}_x \delta A_x + \vec{p}_y \delta A_y + \vec{p}_z \delta A_z.$$

Заметив, что $\delta A_i = \delta A_n \cos(\vec{n}, \vec{e}_i) = n_i \delta A_n$, перепишем условие равновесия в виде

$$\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z, \quad (6.24)$$

или в проекциях на оси декартовых координат

$$\begin{cases} p_{nx} = n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx}; \\ p_{ny} = n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy}; \\ p_{nz} = n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz}. \end{cases} \quad (6.25)$$

Здесь p_{ij} – напряжения, первый индекс которых обозначает направление, перпендикулярно которому ориентирована площадка, а второй индекс – ось, на которую взята проекция. Напряжения p_{ij} ($i = j$) естественно назвать нормальными, напряжения p_{ij} ($i \neq j$) – касательными.

Система (6.25) показывает, что проекции на оси координат вектора напряженности поверхностных сил на произвольно ориентированной площадке выражаются линейно через проекции аналогичных векторов на трех координатных площадках. С учетом этого совокупность девяти чисел

$$\begin{vmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{vmatrix} = P \quad (6.26)$$

представляет собой тензор второго ранга, называемый *тензором напряженностей поверхностных сил*.

Систему равенств (6.25) кратко записывают в виде

$$\vec{p}_n = \vec{n}P, \quad (6.27)$$

то есть вектор напряженности поверхностных сил на произвольно ориентированной площадке, которая проведена через некоторую точку пространства, равен произведению вектора внешней нормали этой площадки на тензор напряженностей поверхностных сил в точке.

Поскольку тензор (6.26) в целом не зависит от ориентации системы координат, он однозначно характеризует напряженное состояние среды в точке, связанное с действием поверхностных сил, и образует поле $P = P(x, y, z, t)$.

6.3.3. Уравнение деформации текучей среды

Закону вязкости Ньютона (6.3) в общем случае пространственного движения соответствует линейная связь между отвечающими друг другу боковыми компонентами тензора напряженностей поверхностных сил и тензора скоростей деформаций:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.28)$$

Обобщим ее для произвольного компонента тензора напряженностей поверхностных сил:

$$p_{ij} = b\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.29)$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$; $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$; $i, j = 1, 2, 3$.

Предположим, что существует линейная связь и между первыми инвариантами рассматриваемых тензоров:

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = b' + \mu' \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right). \quad (6.30)$$

Подставив сюда выражения p_{ii} из формулы (6.29), имеем

$$b = [b' + (\mu' - 2\mu)\text{div } \vec{w}] / 3.$$

Смысл коэффициентов b' и μ' можно выяснить, сопоставив выражение (6.30) для случая покоя с вводимым в гидростатике определением давления

$$p = -(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})/3.$$

Как видно, $\sigma' = -3p$, но согласно формуле (6.30) при движении сжимаемой среды давление зависит еще от дивергенции скорости:

$$p = -(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})/3 + \mu' \operatorname{div} \vec{w} / 3..$$

Опыт показывает, что эта зависимость существенна лишь при скоростях изменения плотности, превышающих скорость релаксации (установления термодинамического равновесия). Для большинства процессов в объектах теплотехники значения $\operatorname{div} \vec{w}$ меньше указанных, поэтому здесь принимают *релаксационную вязкость* μ' равной нулю.

Итак, связь между компонентами тензора напряженностей поверхностных сил и тензора и скоростей деформаций в общем случае имеет вид

$$p_{ij} = -\delta_{ij} \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{w} \right) + \mu \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.31)$$

Это *уравнение деформации текучей среды* называют обобщенным законом вязкости Ньютона, или *законом Навье-Стокса*. Текучую среду, которая подчиняется ему, называют *ньютоновской*, или изотропной линейной вязкой средой. Большинство жидкостей и газов в объектах теплотехники относятся к этому классу.

Для невязкой ($\mu = 0$) среды из (6.31) следует, что нормальные напряжения $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$, а касательные $\tau_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$). Если континуум вязкий ($\mu \neq 0$), несжимаемый ($\operatorname{div} \vec{w} = 0$), то касательные напряжения соответствуют выражению (6.28), а в формулах для нормальных напряжений появляются дополнительные слагаемые, зависящие от вязкости и скорости относительной линейной деформации. Сжимаемость не изменяет касательных напряжений в вязкой среде, но добавляет еще одно слагаемое в нормальные напряжения: здесь они определяются не только давлением, но и двумя

«вязкими» членами, один из которых пропорционален скорости соответствующей линейной деформации, а другой – скорости изменения величины объема.

Глава 7. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ И УРАВНЕНИЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ

7.1. Законы сохранения массы, импульса, энергии

Эти законы являются фундаментальными для гидрогазодинамики. Их можно рассматривать как частные случаи универсального закона сохранения *субстанции*, если таким термином объединить понятия массы, импульса, энергии. Суть закона: макроскопическая субстанция не возникает и не исчезает. Поэтому изменение ее в любой области пространства возможно лишь вследствие обмена субстанцией между различными областями. Указанные изменение и обмен количественно совпадают, если их вычислить за одинаковый промежуток времени. Обычно в качестве такового берут секунду, а рассматриваемую область называют контрольным объемом V_K .

Сказанное позволяет дать следующую формулировку *закона сохранения*: скорость изменения субстанции континуума в контрольном объеме пространства равна секунднему обмену этой субстанцией между объемом и остальным пространством.

Для всех трех разновидностей субстанции движущегося континуума присутствует обмен ею вследствие протекания континуума через воображаемую контрольную поверхность A_K , отделяющую рассматриваемый объем V_K от остального континуума. Обмен импульсом осуществляется также в результате действия сил, а обмен энергией – посредством работы и теплоты. Силовое и энергетическое взаимодействие континуума, находящегося в контрольном объеме, происходит не только по A_K , но и на поверхности твердых тел A_T , контактирующих с ним.

Конкретизируя приведенное выше утверждение по виду субстанции и способам обмена ею, получают формулировки законов сохранения массы, импульса, энергии. Их математическая запись дает интегральные уравнения гидрогазодинамики – неразрывности, движения, энергии соответственно.

При записи левых частей уравнений (скорости изменения субстанций) берут локальную производную (V_K есть фиксированный объем пространства). Обмен субстанцией в результате течения континуума че-

рез A_K выражают с помощью векторов плотности потока массы $\rho \vec{w}$ и энергии $\rho \vec{w}e$, а также тензора плотности потока импульса $\rho \vec{w} \vec{w}$. Перед отвечающими этому обмену поверхностными интегралами ставят знак «минус», ибо они получаются отрицательными для входящих потоков, в то время как последние увеличивают количество субстанции в контрольном объеме. Это несоответствие связано с тем, что для указания ориентации площадки dA использован вектор внешней нормали \vec{n} .

С учетом сказанного *интегральные уравнения неразрывности, движения, энергии* запишем так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_K} \rho dV = - \int_{A_K} \vec{n} \cdot \rho \vec{w} dA; \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_K} \rho \vec{w} dV = - \int_{A_K} \vec{n} \cdot \rho \vec{w} \vec{w} dA + \int_{V_K} \vec{f} \rho dV + \int_{A_K + A_T} \vec{p}_n dA; \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_K} \rho e dV = & - \int_{A_K} \vec{n} \cdot \rho \vec{w} e dA + \int_{V_K} \rho \vec{f} \cdot \vec{w} dV + \\ & + \int_{A_K + A_T} \vec{p}_n \cdot \vec{w} dA - \int_{A_K + A_T} \vec{n} \cdot \vec{q} dA. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Последние два интеграла второго уравнения выражают секундный импульс объемных и поверхностных сил; напряжение последних \vec{p}_n выражают согласно формуле (6.27). Секундная работа (мощность) этих сил вычислена обычным образом: $\rho \vec{f} \cdot \vec{w}$ и $\vec{p}_n \cdot \vec{w}$. В удельную энергию $e = u + w^2 / 2$ включены только внутренняя и кинетическая части ее, так как потенциальная энергия представлена работой массовых сил. Вектор плотности теплового потока \vec{q} учитывает процессы теплопроводности и радиации; наличие знака «минус» перед соответствующим интегралом объяснено выше.

Интегральные уравнения (7.1) – (7.3) справедливы для произвольных течений любых однородных континуумов.

7.2. Дифференциальные уравнения

Их получают из интегральных уравнений таким образом:

- меняют порядок интегрирования и дифференцирования в левых частях (фиксированность объема V_K допускает это);
- преобразуют поверхностные интегралы в объемные по теореме Гаусса;
- объединяют все интегралы в один, при этом он окажется равным нулю;
- приравнивают нулю подинтегральное выражение (если принять содержащиеся в нем функции непрерывными, это можно сделать ввиду произвольности объема V_K).

Применив такой алгоритм к соотношениям (7.1) – (7.3), имеем *дифференциальные уравнения неразрывности, движения, энергии* в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{w}; \quad (7.4)$$

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{f} + \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right); \quad (7.5)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{w^2}{2} + u \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{w} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{p}_j \cdot \vec{w}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}. \quad (7.6)$$

При получении их раскрыты выражения $\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{w}$, $\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{w} \vec{w}$, $\vec{\nabla} \cdot \rho e$, учтена формула (6.14) и принят во внимание тот факт, что ввиду справедливости уравнения неразрывности равны нулю суммы $\vec{w} \partial \rho / \partial t + \vec{w} \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{w}$ и $e \partial \rho / \partial t + e \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{w}$.

Уравнения (7.4) – (7.6) пригодны для любых однородных континуумов и справедливы в каждой точке области, не содержащей разрывов. Их члены рассчитаны на единицу объема и единицу времени.

Согласно уравнению (7.4), скорость изменения плотности дифференциально малой частицы континуума определяется скоростью относительного изменения ее объема. Уравнение (7.5) показывает, что напряженность сил инерции обусловлена действующей на частицу массовой силой и дивергенцией тензора напряженностей поверхностных сил в точке расположения частицы. Уравнение (7.6) связывает скорость изменения кинетической и внутренней энергий частицы с мощностью массовых сил и дивергенциями векторов плотности потоков теплоты и мощности поверхностных сил в точке расположения частицы.

Уравнения движения и энергии в формах (7.5) и (7.6) неудобны для практического применения, поскольку они содержат напряженности поверхностных сил на координатных площадках, а не подлежащие расчету

силы давления и трения. Чтобы эти силы явно вошли в уравнения, надо выразить $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ через компоненты тензора (6.26), а затем использовать уравнение деформации.

Спроектируем уравнение движения (7.5) на ось X и подставим в него значения p_{xx}, p_{yx}, p_{zx} согласно формуле (6.31):

$$\rho \frac{dw_x}{dt} = \rho f_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[-p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{w} + 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \right].$$

На основании этого выражения запишем соотношение, справедливое для проекции на любую ось:

$$\rho \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w_j}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \right], \quad (i = 1, 2, 3). \quad (7.7)$$

Зависимость (7.7) представляет собой компонентную форму записи уравнения движения ньютоновской среды (*уравнения Навье–Стокса*). Все члены его есть отнесенные к единице объема напряженности сил в точке. В левой части уравнения находятся силы инерции, связанные с локальным и конвективным ускорением, в правой части – силы массовые, давления и вязкости (первый вязкий член обусловлен изменением величины объема, второй – изменением его формы).

При $\mu = \text{const}$ уравнение Навье–Стокса принимает вид

$$\rho \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w_j}{\partial x_j} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2},$$

или в векторной форме

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{\nu}{3} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{w} + \nu \Delta \vec{w}. \quad (7.8)$$

В последнем выражении $\nu = \mu / \rho$ – кинематический коэффициент вязкости; знаком Δ обозначен *оператор Лапласа*; все напряженности сил отнесены к единице массы.

Перейдем к преобразованию уравнения энергии. Вначале «раскроем» первый и третий члены выражения (7.6) и перепишем его в виде

$$\left[\rho \frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \vec{w} - \rho \vec{f} \cdot \vec{w} - \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} \cdot \vec{w} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} \cdot \vec{w} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \cdot \vec{w} \right) \right] + \\ + \left[\rho \frac{du}{dt} - \left(\vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} + \vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \right] = 0.$$

С учетом уравнения движения в форме (7.5) соотношение в первых квадратных скобках равно нулю. Тогда и второе выражение равно нулю, так что уравнение энергии можно представить системой двух уравнений:

$$\begin{cases} \rho \frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \vec{w} = \rho \vec{f} \cdot \vec{w} + \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \cdot \vec{w}; \\ \rho \frac{du}{dt} = \left(\vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} + \vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} \right) - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}. \end{cases} \quad (7.9)$$

Первое из них, именуемое *уравнением «живых сил»*, можно рассматривать как энергетический аналог уравнения движения. Оно представляет собой баланс механических энергий в ходе перемещения частицы: скорость изменения ее кинетической энергии определяется мощностью массовых и поверхностных сил. Вторая часть системы (7.9), называемая *уравнением «притока теплоты»*, выражает энергетическую сторону процессов, происходящих внутри частицы: скорость изменения ее внутренней энергии определяется секундной работой поверхностных сил в процессе деформирования и дивергенцией вектора плотности теплового потока в точке расположения частицы.

Теперь рассмотрим уравнения (7.9) для *ньютоновской среды*. Уравнение живых сил здесь получают, сложив произведения соотношений (7.7) на соответствующие компоненты вектора скорости. Уравнение притока теплоты следует из второй части системы (7.9) после «раскрытия»

произведений $\vec{p}_i \cdot \partial \vec{w} / \partial x_i$ и подстановки в них компонент тензора (6.26) с выражением их по уравнению деформации (6.31). Итоговая запись имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} = & -p \operatorname{div} \vec{w} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{w})^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right)^2 \right] - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}, \end{aligned}$$

или

$$\rho \frac{du}{dt} + p \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w_j}{\partial x_j} = \mu D - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (7.10)$$

Здесь выражение μD , называемое *функцией диссипации*, характеризует работу вязких сил по деформированию частицы: при изменении величины объема (первый член), в ходе линейной деформации (второй) и в процессе угловой деформации (третий). Вся эта работа рассеивается (диссипирует) внутри частицы, превращаясь в теплоту.

Согласно уравнению (7.10), этот «внутренний теплоподвод», как и теплота, поступающая в частицу извне, расходуется на изменение внутренней энергии и работу сил давления по изменению величины объема частицы.

Вспомним, что уравнения живых сил и притока теплоты представляют собой две части дифференциального уравнения энергии. Вторую часть можно использовать как собственно уравнение энергии, если в системе уже есть уравнение движения. Поскольку через системную связь уравнения притока теплоты с уравнением движения учтена возможность взаимопревращения видов энергий, присутствующих в урав-

нениях притока теплоты и живых сил, введение последнего в систему излишне. Если же уравнение энергии применяют в отрыве от остальных уравнений, его надо записывать в полном виде.

7.3. Краевая задача гидрогазодинамики

7.3.1. Система дифференциальных уравнений

Эта система включает уравнения законов сохранения массы, импульса, энергии для однородного ньютоновского континуума. В компонентной записи она выглядит так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\rho \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w_j}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w_j}{\partial x_j} \right) + \\ + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \right], \quad (i = 1, 2, 3); \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = -\frac{p}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w_j}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\mu}{\rho} D. \end{array} \right. \quad (7.11)$$

В качестве уравнения энергии здесь взято уравнение притока теплоты (см. подразд. 7.2). Все уравнения справедливы при отсутствии разрыва непрерывности параметров. Их члены записаны в расчете на единицу массы.

7.3.2. Гипотезы замыкания

Система фундаментальных уравнений гидрогазодинамики незамкнута. Для замыкания ее вводят дополнительные сведения о свойствах конкретной среды и о внешних воздействиях.

Так, массовые силы обычно считают потенциальными:

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}G, \quad (7.12)$$

где $G(x, y, z)$ – заданный *потенциал массовых сил*. Вектор плотности теплового потока берут в виде

$$\bar{q} = -\lambda_{\text{э}} \vec{\nabla} T, \quad (7.13)$$

отвечающем закону Фурье (6.4), но здесь использован эффективный коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{э}}$, учитывающий и теплоперенос посредством излучения.

Свойства конкретной среды задают уравнениями состояния

$$\rho = \rho(T, p); \quad u = u(T, \rho) \quad (7.14)$$

и формулами для коэффициентов переноса

$$\mu = \mu(T, p); \quad \lambda_{\text{э}} = \lambda(T, p). \quad (7.15)$$

Если соотношения для $\rho, u, \mu, \lambda_{\text{э}}$ не содержат новых неизвестных, совокупность фундаментальных уравнений (7.11) и записанных гипотез является замкнутой.

Отметим, что второй закон термодинамики косвенно будет учтен в приведенных уравнениях и гипотезах, если потребовать, чтобы значения μ и $\lambda_{\text{э}}$ были положительными.

7.3.3. Условия однозначности

Интегрирование системы дифференциальных уравнений, дополненной гипотезами замыкания, дает общее решение для соответствующего класса течений. Оно многозначно, ибо содержит некоторые функции и константы, значения которых могут быть установлены только при задании дополнительных условий. Последние позволяют выделить из общего решения частное, которое уже будет однозначным, соответствующим конкретному течению.

Различают геометрические, физические, начальные и граничные условия *однозначности*, или *краевые условия*.

Геометрические условия описывают форму и размеры расчетной области. По виду ее выделяют задачи внешние (обтекание твердых тел), внутренние (течение в каналах), смешанные (совокупность первых двух) и струйные (истечение среды в среду).

Физические условия должны задавать свойства континуума, однако они уже заданы гипотезами замыкания. Поэтому здесь идет речь лишь о численных значениях констант, содержащихся в уравнениях состояния и формулах коэффициентов переноса.

Начальные условия указывают поля искомых функций и производных их по времени в расчетной области в некоторый исходный момент. Они существенны для нестационарных течений.

Граничными условиями определяется взаимодействие расчетной области на границе ее по массе, импульсу, энергии. Различают граничные условия первого, второго и третьего рода. В первом случае на границе известны значения искомых функций, во втором – их производных. Условия третьего рода устанавливают пропорциональность потока субстанции через границу и разности потенциалов взаимодействия на границе и вне ее. Кроме того, заданы значения этих потенциалов за пределами расчетной области и величины коэффициентов пропорциональности.

Границами расчетной области в задачах гидрогазодинамики являются, как правило, поверхность твердого тела («стенка»), а также бесконечность (во внешних задачах) и ось симметрии канала (в задачах внутренних). Кроме того, границами могут быть условные поперечные сечения (в одномерных задачах), свободная поверхность среды (в задачах о безнапорном течении), поверхность контакта одной среды с другой (для струйных задач).

При наличии разрыва его поверхность рассматривают как границу частей расчетной области, в каждой из которых дифференциальные уравнения справедливы. В качестве граничных здесь выступают условия на разрыве; их получают из интегральных уравнений (последние выполняются и при переходе через разрыв).

В заключение отметим, что задачу с заданными условиями однозначности называют прямой. В обратной задаче эти условия подлежат определению по известным полям функций в расчетной области.

7.3.4. Типичные упрощения краевой задачи

Интегрирование фундаментальных уравнений гидрогазодинамики затруднено их нелинейностью, которая является следствием взаимосвязи полей \vec{w} , ρ , p , T и зависимости μ , λ от p , T . Поэтому в большинстве случаев вводят *дополнительную схематизацию* в постановку конкретной задачи.

Одно из упрощений связано с *понижением размерности задачи*. Так, в некоторых случаях в соответствующей системе координат движение можно считать установившимся. В ряде задач трехмерную постановку заменяют двумерной или одномерной.

К числу типичных относится также *упрощение модели среды*. Например, иногда принимают, что среда несжимаемая, невязкая, нетеп-

лопроводная. Возможен косвенный учет этих свойств в упрощенных уравнениях.

Еще одним средством упрощения краевой задачи является *использование особенностей течения*. Так, если течение жидкости потенциально (см. подразд. 6.2.4), то можно использовать метод наложения, а при плоском движении применить аппарат теории функций комплексной переменной.

Значительное место среди упрощений краевой задачи занимает *линеаризация уравнений и граничных условий*. Она реализуема, когда внешние воздействия малы.

Важнейшее типичное упрощение – разделение течения вязкой среды на две расчетные области – *пограничный слой*, непосредственно прилегающий к стенке, и внешнюю *зону потенциального течения*. В каждой из них дифференциальные уравнения получаются более простыми, чем исходные. Возможность такой схематизации обосновал Жуковский. Он же показал, что в потенциальной области вязкость жидкости не проявляется. В этой связи важное значение имеют течения невязкого континуума.

7.3.5. Интегралы уравнения движения невязкой среды

Это уравнение может быть записано в *форме Эйлера*

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \vec{w} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (7.16)$$

и в *форме Громеки-Лэмба*

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{w^2}{2} \right) - \vec{w} \times \text{rot} \vec{w} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p. \quad (7.17)$$

Умножим последнее выражение скалярно на элемент длины $d\vec{r}$, приняв, что течение стационарно ($\partial / \partial t = 0$), массовые силы потенциальны ($\vec{f} = -\vec{\nabla} G$), среда баротропна, то есть $\rho = \rho(p)$. В итоге получим $d(w^2 / 2) + dG + dp / \rho = (\vec{w} \times \text{rot} \vec{w}) \cdot d\vec{r}$. Если правая часть здесь равна нулю, решение дает *интеграл Бернулли*

$$\frac{w^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + G = \text{const}. \quad (7.18)$$

Произведение $(\vec{w} \times \text{rot} \vec{w}) \cdot d\vec{r} = (\text{rot} \vec{w} \times d\vec{r}) \cdot \vec{w} = (d\vec{r} \times \vec{w}) \cdot \text{rot} \vec{w}$ равно нулю при $d\vec{r} = 0$, $\vec{w} = 0$, $\text{rot} \vec{w} = 0$, $\vec{w} \times \text{rot} \vec{w} = 0$, $\text{rot} \vec{w} \times d\vec{r} = 0$, $d\vec{r} \times \vec{w} = 0$. В последних четырех вариантах (покой среды не рассматриваем) интеграл Бернулли имеет вид (7.18), однако области существования константы для них различны. При $\text{rot} \vec{w} = 0$ (потенциальное течение) и $\vec{w} \times \text{rot} \vec{w} = 0$ (винтовое течение) значение константы одинаково по всему потоку. Когда $\text{rot} \vec{w} \times d\vec{r} = 0$ (интегрирование по вихревой линии) и $d\vec{r} \times \vec{w} = 0$ (интегрирование по линии тока), константа неизменна только вдоль этих линий, причем в обоих случаях значения константы различны на разных линиях.

Если жидкость находится в поле гравитации, то интеграл (7.18) превращается в *уравнение Бернулли*

$$w^2 / 2 + p / \rho + gy = \text{const}. \quad (7.19)$$

Для *нестационарного* безвихревого ($\vec{w} = \vec{\nabla} \Phi$) движения баротропной среды в потенциальном поле массовых сил решение уравнения (7.17) дает *интеграл Лагранжа-Коши*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{w^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + G = f(t), \quad (7.20)$$

где функция $f(t)$ одинакова по всему течению.

7.4. Критериальная форма уравнений

7.4.1. Элементы теории подобия

Ввиду трудности решения краевой задачи в гидрогазодинамике большую роль играет эксперимент. Его результаты справедливы, строго говоря, лишь для условий проведения единичного опыта. Представляет интерес обобщение этих результатов на случаи, сходные с исследованным. Условия, при которых такое обобщение возможно, устанавливает *теория подобия*.

Ее основное положение: два физических явления одной природы *подобны*, если у них в сходственные моменты времени в сходственных точках пространства одинаковы отношения сходственных величин. Отсюда следует, что подобные явления имеют одинаковое безразмерное описание.

Последнее обстоятельство указывает путь *обобщения математической модели*, полученной экспериментально: ее надо представлять в безразмерном виде. Обобщенную модель можно использовать для сходных с изученным явлений, если у них численно одинаковы отношения сходственных величин.

Обобщая определение физического подобия, под сходственными величинами будем понимать не первоначальные параметры, а факторы, определяющие явление. В динамических задачах ими являются силы, в тепловых – разности температур и др.

Отношения сходственных факторов можно считать *обобщенными безразмерными переменными*, функцией которых и будет результат исследования. Понятно, что такие переменные являются комплексами первоначальных параметров. В отличие от них отношения однотипных единиц измерения называют симплексами.

Конкретный вид обобщенных переменных, численное равенство которых определяет подобие, можно установить по соответствующему дифференциальному уравнению, поскольку члены его и описывают факторы, существенные для данного явления. Надо привести уравнение к безразмерной форме и посмотреть, что определит его полное совпадение для двух сравниваемых явлений одного класса.

7.4.2. Критерии подобия в гидрогазодинамике

Применим такую процедуру к уравнению движения в форме (7.8). Введем отношения первоначальных параметров к их характерным значениям (масштабам) вида $\bar{x} = x/l_M$, $\bar{w} = \vec{w}/w_M$, $\bar{p} = p/p_M$ и др. Затем размерные параметры и операторы, входящие в уравнение, выразим как произведения соответствующих безразмерных величин и масштабов. При этом каждый член уравнения будет включать в себя безразмерную часть, аналогичную исходной его записи, и размерный коэффициент, составленный из масштабов. После деления таких коэффициентов на тот из них, который стоит у конвективного ускорения, получим

$$\frac{l_M}{w_M t_M} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + (\bar{w} \cdot \bar{\nabla}) \bar{w} = \frac{f_M l_M}{w_M^2} \bar{f} - \frac{p_M}{\rho_M w_M^2} \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{\nabla} \bar{p} +$$

$$+ \frac{\mu_M}{\rho_M w_M l_M} \left[\frac{\bar{\mu}}{3\bar{\rho}} \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{w}) + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\rho}} (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) \bar{w} \right].$$

Теперь уравнение движения стало безразмерным; оно совпадет у двух сравниваемых течений, если у них окажутся численно равными

безразмерные комплексы из масштабов при соответствующих членах. По этой причине упомянутые комплексы называют *критериями (числами) подобия*; здесь их четыре:

$$\frac{w_M t_M}{l_M} = Sh, \quad \frac{w_M^2}{f_M l_M} = Fr, \quad (7.21)$$

$$\frac{p_M}{\rho_M w_M^2} = Eu, \quad \frac{\rho_M w_M^2 l_M}{\mu_M} = Re. \quad (7.22)$$

Они образуют *систему критериев динамического подобия*, так как по физическому смыслу каждый из них есть отношение напряженности силы инерции, связанной с конвективным ускорением, и напряженностей других сил: массовых (число *Фруда Fr*), давления (число *Эйлера Eu*), вязкости (число *Рейнольдса Re*) и сил инерции, связанных с локальным ускорением (число *Струхала Sh*). *Математический смысл критериев подобия*: они определяют порядок членов уравнения по сравнению с одним из них, порядок которого принят за единицу.

Анализ уравнения неразрывности выявляет присутствие в нем только числа Струхала, однако физический смысл его здесь иной: он является отношением изменений плотности, связанных с неоднородностью и нестационарностью ее поля.

Критерий Струхала наличествует и в уравнении энергии как отношение количеств теплоты, переносимой движущейся средой в неоднородном поле температур и накапливаемой или теряемой объемом при изменении температуры во времени. Отношениями интенсивностей видов энергообмена являются здесь и остальные критерии подобия. Их можно выразить через числа (7.22) и дополнительные критерии *Прандтля Pr* и *Пуассона Po*:

$$Pr = \frac{\mu_M c_{pM}}{\lambda_M}, \quad Po = \frac{c_{pM}}{c_{vM}}. \quad (7.23)$$

Первый из них характеризует теплофизические свойства среды, второй является отношением изобарной и изохорной теплоемкостей.

Характерные значения (масштабы) величин, помеченные индексом «м», берут из условий однозначности. Далее эти индексы будут опущены.

7.4.3. Критериальные уравнения

Поскольку краевая задача включает в себя не только систему дифференциальных уравнений, но и условия однозначности, для подобия течений необходимо численное равенство как найденных критериев подобия, так и симплексов, выражающих эти условия.

Критерии подобия и упомянутые симплексы служат не только для указания подобия течений. Как безразмерные переменные они позволяют дать обобщенное описание результатов единичного эксперимента, для чего последние надо представить в виде функциональной связи между такими переменными. Это утверждение обосновано в *анализе размерностей*, одна из теорем которого устанавливает, что всякое соотношение между размерными величинами можно привести к соотношению безразмерных величин.

Такие соотношения записывают в виде явной функции зависимой переменной от независимых. К числу последних относят критерии подобия, безразмерные условия однозначности и (при необходимости) безразмерные координаты. Зависимыми переменными могут быть безразмерные параметры течения и критерии подобия, в которые входит определяемая величина. Под нею понимают текущее значение некоторого параметра, а не характерное значение его, следующее из условий однозначности.

При оформлении таких функциональных связей можно ориентироваться на вид соответствующих дифференциальных уравнений гидрогазодинамики.

Однако описанный подход может привести к потере взаимосвязи параметров, отражаемой системой уравнений, например, при раздельном использовании упомянутых функциональных связей. Для гарантии учета указанной взаимосвязи эти функции представляют так, чтобы в их правые части входили все характерные для задачи определяющие критерии подобия, безразмерные условия однозначности и координаты.

В связи со сказанным безразмерные уравнения неразрывности, движения и энергии пишут как однотипные функции вида

$$\bar{\Pi} = f(\text{Sh}, \text{Fr}, \text{Eu}, \text{Re}, \text{Pr}, \text{Po}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots). \quad (7.24)$$

Здесь параметру $\bar{\Pi}$ соответствуют безразмерные плотность в первом случае, давление во втором, температура в третьем; символом ... обозначены симплексы (параметрические критерии), отражающие условия однозначности.

Структурно такие *критериальные уравнения* записывают в виде степенных одночленов, опираясь на теорему анализа размерностей, согласно которой размерности производных величин имеют форму степенного одночлена размерностей основных величин. Конкретный вид их устанавливают обработкой результатов опыта. Получанное критериаль-

ное уравнение справедливо для всех течений, подобных исследованному.

7.5. Уравнения для турбулентных потоков

Решения краевой задачи гидрогазодинамики (см. подразд. 7.3) хорошо согласуются с опытом, если числа Re сравнительно невелики. При относительно больших значениях критерия Рейнольдса такого соответствия нет.

Как показали исследования, в первом случае наблюдается слоистое (*ламинарное*) течение: здесь каждая дифференциально малая частица среды движется в заданном направлении, не выходя из «своего» слоя. Упорядоченное движение приводит к закономерному поведению параметров, образующих поля. При больших числах Рейнольдса течение становится *турбулентным*; в нем хаотически происходят продольные и поперечные перемещения частиц (объемов), размеры которых колеблются от $V_{эл}$ до $l_{хз}^3$ (см. подразд. 6.1.1). В целом турбулентный поток «придерживается» заданного направления, но по указанной причине параметры потока являются случайными величинами.

Возможность существования ламинарного или турбулентного режимов определяется соотношением сил инерции и вязкости, а также наличием возмущений в потоке. Переход от ламинарного режима к турбулентному есть потеря устойчивости ламинарного течения под действием возмущений; силы инерции способствуют их развитию, а силы вязкости препятствуют.

Вследствие упомянутого поведения параметров при турбулентном режиме исходная математическая модель, основанная на аппарате непрерывных дифференцируемых функций, не дает корректного описания течений. Здесь следует использовать теорию вероятностей и математическую статистику. Однако на этом пути не получено результатов, пригодных для инженерных расчетов.

Такие результаты дал другой подход, учитывающий, что совершенно хаотическое, на первый взгляд, поведение параметров турбулентного потока представляет собой хаотическую *пульсацию* их относительно средних значений, которые уже подчиняются определенным закономерностям. Было предложено записывать уравнения гидрогазодинамики по этим *осредненным значениям параметров*, а влияние пульсаций учитывать введением дополнительных членов. Последние в свою очередь выражают через производные осредненных параметров, поскольку именно наличие этих производных приводит к результирующему проявлению пульсаций.

Например, при таком подходе проекция на ось X уравнения движения в форме (7.5) приобретает вид

$$\frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \tilde{w}_j \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial x_j} = \tilde{f}_x + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\sigma}_{xx} - \rho \overline{w'_x w'_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{\tau}_{yx} - \rho \overline{w'_x w'_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{\tau}_{zx} - \rho \overline{w'_x w'_z}) \right].$$

Здесь $\tilde{\sigma}_{xx}$, $\tilde{\tau}_{yx}$, $\tilde{\tau}_{zx}$ – компоненты тензора напряженностей поверхностных сил в «осредненном движении»; дополнительные члены вида $-\rho \overline{w'_i w'_j}$ есть напряжения, обусловленные переносом импульса вследствие пульсационного перемещения объемов среды (символ $\overline{\quad}$ означает осреднение).

Совокупность таких членов в проекциях уравнения движения на оси X, Y, Z образует *тензор турбулентных напряжений*. Компоненты его не вычисляют по выражениям вида $-\rho \overline{w'_i w'_j}$, а связывают с производными осредненных скоростей. Например, для ньютоновской среды используют линейную зависимость типа (6.31). Тем самым как бы проводят аналогию между «механизмами» переноса импульса в результате теплового движения молекул (см. подразд. 6.1.2) и хаотического перемещения объемов среды в турбулентном потоке.

Аналогично тому, как сплошной среде было приписано свойство вязкости μ для учета молекулярного переноса импульса, турбулентному течению соотносят *турбулентную вязкость* μ_T , чтобы охарактеризовать пульсационный перенос импульса.

Введение понятия турбулентной вязкости позволяет выразить сумму обычных и турбулентных напряжений в виде одного члена с коэффициентом пропорциональности $\mu + \mu_T$. При этом уравнение движения для турбулентного потока будет представлено в форме, полностью совпадающей с исходной, но записанной по осредненным параметрам с заменой μ на сумму $\mu + \mu_T$.

Таким же образом поступают с турбулентным переносом внутренней энергии: его выражают законом Фурье через производную осредненной температуры \tilde{T} и коэффициент *турбулентной теплопроводности* λ_T . Для ньютоновской среды это позволяет записать уравнение притока теплоты в виде (7.10) с учетом (7.13), используя вместо истинных параметров их осредненные значения и заменив эффективный коэффициент теплопроводности λ_{ϑ} суммой $\lambda_{\vartheta} + \lambda_T$.

С учетом изложенной концепции учета турбулентного переноса и эквивалентности уравнений $\text{div}\vec{w} = 0$ и $\text{div}\vec{\tilde{w}} = 0$ запишем систему дифференциальных уравнений для турбулентного течения ньютоновской несжимаемой среды:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial x_j} = 0; \\ \frac{d\tilde{w}_i}{dt} = \tilde{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j} \right) \right], (i = 1, 2, 3); \\ \frac{d\tilde{T}}{dt} = \frac{1}{\rho c_v} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\lambda_s + \lambda_T) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right] + \frac{(\mu + \mu_T)}{\rho} \tilde{D}, \end{array} \right. \quad (7.25)$$

где
$$\mu_T = \frac{-\rho \overline{w'_i w'_j}}{\partial \tilde{w}_i / \partial x_j}; \quad \lambda_T = \frac{\rho c_v \overline{w'_j T'}}{\partial \tilde{T} / \partial x_j}. \quad (7.26)$$

Системы уравнений типа (7.25) позволяют найти осредненные значения параметров турбулентного потока с учетом влияния пульсаций. Решение их хорошо согласуется с опытом, если гипотезы о связи μ_T и λ_T с производными осредненных параметров учитывают особенности структуры турбулентности в потоке.

Чаще всего такие гипотезы вытекают из *полуэмпирических теорий турбулентности*, в которых важную роль играет эксперимент. Поскольку турбулентные течения, проходящие в разных условиях, отличаются по характеру турбулентности, универсальная теория здесь отсутствует. Применительно к внутренним задачам хорошие результаты дает теория пристеночной турбулентности (теория «пути перемешивания»).

В критериальных уравнениях гидрогазодинамики турбулентность учитывают косвенно через коэффициент пропорциональности и показатели степени у чисел подобия; последние же вычисляют по осредненным параметрам и обычным переносным свойствам среды.

Глава 8. ОДНОМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

8.1. Одномерное описание потоков жидкости

8.1.1. Строго одномерные уравнения для несжимаемой среды

Одномерным называют течение, параметры которого изменяются только по одной пространственной координате (вдоль вектора скорости \vec{W}). Для жидкости в одномерной постановке обычно решают задачи о стационарном изотермном течении в трубопроводах под действием перепада давления и силы гравитации. Искомой величиной здесь является скорость жидкости, а плотность ее задана. При этом уравнения неразрывности и движения образуют замкнутую систему. Записывая ее, учитывают, что ввиду отсутствия производных по нормальным к \vec{W} координатам среда не может быть вязкой.

В итоге из системы уравнений (7.11) для течения по линии l (рис. 8.1) имеем:

В итоге из системы уравнений (7.11) для течения по линии l (рис. 8.1) имеем:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dl} = 0; \\ w \frac{dw}{dl} = g_l - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl}. \end{cases} \quad (8.1)$$

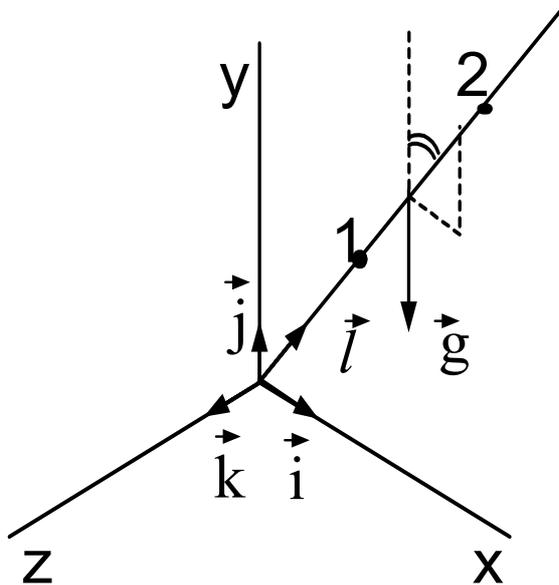


Рис. 8.1

Так как

$$g_l dl = (\vec{g} \cdot \vec{l}) dl = -g(\vec{j} \cdot \vec{l}) dl = -g \cos(\vec{j}, \vec{l}) dl = -g dy,$$

система (8.1) в полных дифференциалах принимает вид

$$\begin{cases} dw = 0; \\ wdw = -gdy - dp/\rho. \end{cases} \quad (8.2)$$

Интегрирование между точками 1 и 2, взятыми вдоль направления течения, дает единственное решение:

$$\begin{cases} w_1 = w_2; \\ w_1^2/2 + p_1/\rho + gy_1 = w_2^2/2 + p_2/\rho + gy_2. \end{cases} \quad (8.3)$$

Здесь скорость жидкости постоянна, а давление может меняться только под действием массовой силы. Однако в реальных потоках скорость зависит от площади поперечного сечения трубопровода, а на давление влияют силы вязкости (они препятствуют течению).

8.1.2. Гидравлический подход

Чтобы учесть упомянутые выше факторы, сохранив простоту одномерных уравнений, применяют *гидравлический подход*: свойства среды и обстоятельства течения, нарушающие его одномерность, учитывают введением в строго одномерные уравнения поправок, в том числе *среднерасходной скорости*

$$w_{cp} = \frac{1}{A} \int_A w dA = \frac{\dot{V}}{A}, \quad (8.4)$$

где A – площадь поперечного сечения трубопровода, \dot{V} – объемный расход жидкости через сечение за секунду.

Применим гидравлический подход к системе уравнений (8.3). Первое уравнение модифицируем исходя из того, что при переходе от сечения A_1 к сечению A_2 в канале остается постоянным объемный расход $\dot{V} = w_{cp} A$. В правую часть второго уравнения, совпадающего с уравнением Бернулли (7.19), добавляем член $\Delta p_{тр12} / \rho$, где $\Delta p_{тр12} > 0$ – *потери давления*, вызванные вязкими силами. Кроме того, вместо $w^2/2$ пишем $\alpha w_{cp}^2/2$, где коэффициент α учитывает отличие $w_{cp}^2/2$ от удельного потока кинетической энергии при неравномерном (из-за вязкости) профиле скорости:

$$\alpha = \frac{1}{\rho \dot{V}_A} \int_A \rho w \left(\frac{w^2}{2} \right) dA : \frac{w_{cp}^2}{2} = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{w}{w_{cp}} \right)^3 dA. \quad (8.5)$$

В итоге получаем *модифицированные одномерные уравнения*:

$$w_{cp1} A_1 = w_{cp2} A_2; \quad (8.6)$$

$$\alpha_1 \frac{w_{cp1}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g y_1 = \alpha_2 \frac{w_{cp2}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g y_2 + \frac{\Delta p_{тр12}}{\rho}, \quad (8.7)$$

где y – высота центра тяжести сечений.

Записанная модель гидравлического уровня пригодна для расчета стационарных изотермных течений жидкости в трубопроводах, если не интересоваться профилем скорости в поперечном сечении.

Согласно *модифицированному уравнению Бернулли* (8.7), суммы удельных значений кинетической энергии, энергии давления и потенциальной энергии положения жидкости в двух сечениях трубопровода отличаются на величину удельной работы вязких сил

$$l_{тр12} = \Delta p_{тр12} / \rho. \quad (8.8)$$

8.1.3. Формулы сопротивления

Значение коэффициента кинетической энергии берут равным $\alpha = 2$ при ламинарном режиме и $\alpha \approx 1,1$ – при турбулентном.

Перепад давления $\Delta p_{тр}$, затрачиваемый на преодоление сил вязкости, находят по формулам, структура которых вытекает из безразмерного уравнения движения (см. подразд. 7.4.3). Здесь оно имеет вид $Eu = f_1(Re, \text{ геометрия})$, где определяемый критерий Эйлера $Eu = \Delta p_{тр} / \rho w_{cp}^2$. Это позволяет записать такую формулу для потерь давления:

$$\Delta p_{тр} = \zeta \rho w_{cp}^2 / 2, \quad (8.9)$$

где *коэффициент сопротивления* $\zeta = f_2(Re, \text{ геометрия})$. Различают два вида потерь давления.

Путевые $\Delta p_{п}$ потери отвечают течению вязкой жидкости в прямых трубах постоянного поперечного сечения. Они вызваны молекулярным и

турбулентным переносом импульса между слоями жидкости и распределены по длине l трубы. Поэтому здесь берут $\zeta = \zeta_{\Pi} = \xi l / d_{\Gamma}$, где ξ – *линейный коэффициент сопротивления* (функция числа Re и формы поперечного сечения); d_{Γ} – *гидравлический диаметр* трубы $d_{\Gamma} = 4A / \Pi$, найденный по смоченному периметру Π сечения A . С учетом этого из (8.9) получаем *формулу Дарси*

$$\Delta p_{\Pi} = \xi \frac{l}{d_{\Gamma}} \frac{\rho w_{\text{cp}}^2}{2}. \quad (8.10)$$

Местные потери Δp_{M} обусловлены деформацией профиля скорости и образованием вихрей в потоке при изменении его направления или поперечного сечения. Эти процессы протекают на определенной длине, однако соответствующие им потери давления условно считают сосредоточенными в некотором расчетном сечении. Для него и берут среднерасходную скорость в *формуле Вейсбаха*

$$\Delta p_{\text{M}} = \zeta_{\text{M}} \rho w_{\text{cp}}^2 / 2, \quad (8.11)$$

где ζ_{M} – *коэффициент местного сопротивления*, зависящий от числа Рейнольдса и геометрии.

Формулы Дарси и Вейсбаха можно переписать в виде

$$\Delta p_{\Pi} = Z_{\Pi} \dot{V}^2; \quad \Delta p_{\text{M}} = Z_{\text{M}} \dot{V}^2, \quad (8.12)$$

если ввести *гидравлические сопротивления*

$$Z_{\Pi} = \xi \frac{\Pi}{8A^3} \rho; \quad Z_{\text{M}} = \zeta_{\text{M}} \frac{1}{2A^2} \rho. \quad (8.13)$$

Введение таких расчетных величин целесообразно, когда коэффициенты ξ и ζ_{M} слабо зависят от числа Рейнольдса. В этом случае значения Z_{Π} и Z_{M} можно найти независимо от расхода, что упрощает гидравлический расчет систем трубопроводов.

8.2. Уравнения одномерных течений газа

8.2.1. Строго одномерные уравнения для сжимаемой среды

При рассмотрении движения газа действием гравитационных сил пренебрегают. Если ограничиться стационарным случаем и учесть, что ввиду одномерности следует взять $\mu = 0$ и $\lambda = 0$, из системы уравнений (7.11) для течения вдоль линии l получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} w \frac{d\rho}{dl} = -\rho \frac{dw}{dl}; \\ w \frac{dw}{dl} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl}; \\ w \frac{du}{dl} = -\frac{p}{\rho} \frac{dw}{dl}, \end{array} \right. \quad (8.14)$$

или в полных дифференциалах:

$$\left\{ \begin{array}{l} w d\rho + \rho dw = 0; \\ w dw + dp / \rho = 0; \\ w du + p dw / \rho = 0. \end{array} \right. \quad (8.15)$$

Эту систему замыкают уравнениями состояния. Например, для идеального газа имеем $du = c_v dT$ и $d(p/\rho) = R dT$. В качестве замыкающего может быть использовано и уравнение термодинамического процесса. Так, в случае изоэнтропного процесса его уравнение $d(p/\rho^k) = 0$ замыкает систему уравнений неразрывности и движения.

Уравнение энергии для одномерного течения газа лучше записывать не в форме уравнения притока теплоты, а в полном виде. Разделив на W третье уравнение системы (8.15), добавив к нему второе уравнение и подставив dw/w из первого, имеем $du + d(p/\rho) + d(w^2/2) = 0$, что для идеального газа дает

$$c_v dT + d(p/\rho) + d(w^2/2) = 0. \quad (8.16)$$

С учетом изложенного уравнения (8.15) перепишем в виде

$$\begin{cases} d(\rho w) = 0; \\ d(p + \rho w^2) = 0; \\ d(c_v T + p/\rho + w^2/2) = 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

(здесь принято $c_v = \text{const}$). Интегрирование этой системы дает

$$\begin{cases} \rho w = \text{const}; \\ p + \rho w^2 = \text{const}; \\ c_v T + p/\rho + w^2/2 = \text{const}. \end{cases} \quad (8.18)$$

Как видно, строго одномерные уравнения выражают постоянство плотностей потоков массы и полного импульса, а также неизменность удельной энергии газа (одномерность формально запрещает обмен массой, импульсом, энергией между газом и окружающей средой и требует постоянства площади A поперечного сечения). Поэтому такие уравнения непригодны для реальных течений вязкого теплопроводного газа в каналах переменного сечения, часто сопровождающихся энерго-массообменом.

8.2.2. Модифицированные одномерные уравнения для газа

Учесть указанные обстоятельства, сохранив одномерность уравнений, можно с помощью гидравлического подхода. Введем необходимые поправки в уравнения, полученные интегрированием системы (8.17) между сечениями 1 и 2:

$$\rho_2 w_2 A_2 - \rho_1 w_1 A_1 = \Delta m_{12}; \quad (8.19)$$

$$(p_2 + \rho_2 w_2^2) A_2 - (p_1 + \rho_1 w_1^2) A_1 = R_{l_{12}} + I_{l_{\Delta m_{12}}}; \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} (c_v T_2 + p_2/\rho_2 + w_2^2/2) \dot{m}_2 - (c_v T_1 + p_1/\rho_1 + \\ + w_1^2/2) \dot{m}_1 = Q_{12} - L_{\text{tex}12} + E_{\Delta m_{12}}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Здесь Δm_{12} – обмен массой на участке 1-2 за единицу времени; $R_{l_{12}}$ – проекция на линию l силы действия стенок канала (в том числе подвижных), включая силы трения; $I_{l_{\Delta m_{12}}}$ – проекция на линию l полного

импульса массы Δm_{12} ; \dot{m}_1 и \dot{m}_2 – массовые расходы газа в сечениях 1 и 2; Q_{12} и $L_{\text{тех}12}$ – секундные количества теплоты и технической работы; $E_{\Delta m_{12}}$ – полная энергия массы Δm_{12} . Под величиной W здесь понимают среднерасходную скорость согласно (8.4). Коэффициенты (8.5) в уравнения не введены, так как при больших числах Рейнольдса, характерных для обычно рассматриваемых течений газа, профиль скорости близок к равномерному. Знаки Δm_{12} и $E_{\Delta m_{12}}$ приняты положительными при вводе массы и отрицательными при выводе ее.

Дифференциальным аналогом математической модели (8.19) – (8.21) является система

$$\begin{cases} d(\rho w A) = \delta m; \\ d[(p + \rho w^2) A] = \delta R_l + \delta I_{l\delta m}; \\ d[(c_v T + p/\rho + w^2/2)\dot{m}] = \delta Q - \delta L_{\text{тех}} + \delta E_{\delta m}. \end{cases} \quad (8.22)$$

Если массообмена нет, система (8.22) примет вид

$$\begin{cases} d(\rho w A) = 0; \\ d[(p + \rho w^2) A] = \delta R_l; \\ d(c_v T + p/\rho + w^2/2) = \delta q - \delta l_{\text{тех}}, \end{cases} \quad (8.23)$$

или при записи второго уравнения в энергетической форме:

$$\begin{cases} d(\rho w A) = 0; \\ w dw = -dp/\rho - \delta l_{\text{тех}} - \delta l_{\text{тр}}; \\ d(c_v T + p/\rho + w^2/2) = \delta q - \delta l_{\text{тех}}. \end{cases} \quad (8.24)$$

Здесь δq , $\delta l_{\text{тех}}$ и $\delta l_{\text{тр}}$ – отнесенные к единице массового расхода газа значения δQ , $\delta L_{\text{тех}}$ и работы сил трения. Величину $\delta l_{\text{тр}}$ можно представить в виде $dp_{\text{тр}} / \rho$, где $dp_{\text{тр}}$ – потери давления из-за трения на длине dl .

Уравнения движения и энергии в форме (8.24) сохраняют свой вид и для течения с массообменом, если газ вводить или выводить перпендикулярно оси потока при совпадении параметров вводимого газа и основного потока во всех сечениях.

8.3. Газодинамические функции

8.3.1. Критерии подобия для одномерных течений газа

Анализ системы критериев подобия (см. подразд. 7.4.2) показывает, что для строго одномерных стационарных течений газа существенны только критерии Эйлера $Eu = p / (\rho w^2)$ и Пуассона $Po = c_p / c_v$. В самом деле, в строго одномерной постановке факторами, определяющими особенности течения, являются лишь сжимаемость газа и способность его к взаимному преобразованию внутренней энергии и деформационной работы.

Определяющий критерий Эйлера здесь можно переписать в виде

$$Eu = \frac{p}{\rho w^2} = \frac{k p}{k \rho w^2} = \frac{1}{k} \frac{a^2}{w^2} = \frac{1}{k M^2}, \quad (8.25)$$

где $M = w / a$ – критерий, или число *Маха* (отношение скорости течения среды к скорости звука в ней). Действительно, по определению «местная» скорость звука

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad (8.26)$$

и с учетом уравнения изоэнтропы $p / \rho^k = \text{const}$ имеем

$$a^2 = k p / \rho. \quad (8.27)$$

Поскольку критерий Пуассона Po совпадает с показателем изоэнтропы для идеального газа k , соотношение (8.25) означает, что для строго одномерного стационарного течения газа система определяющих критериев подобия состоит из k и M .

Число Маха есть критерий динамического подобия – это следует из формулы (8.25). Он представляет собой отношение сил инерции и сил упругости, что вытекает из сопоставления выражений (8.26) и (6.7). Связь отношения w/a с проявлением сжимаемости среды уже упоминалась в подразд. 6.1.3. Ее подтверждает и уравнение движения системы (8.15), которое можно записать так:

$$w^2 \frac{dw}{w} = - \frac{dp}{\rho} \frac{d\rho}{\rho},$$

или согласно (8.26)

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dw}{w}. \quad (8.28)$$

Как видно, одно и то же изменение скорости вызывает сравнительно малое проявление сжимаемости при $M \ll 1$ и сильное при $M \gg 1$.

Критерии M и k будут единственными аргументами в *критериальных уравнениях* строго одномерного стационарного течения газа. Согласно подразд. 7.4.3, такие уравнения представляют собой зависимости безразмерных параметров – плотности, давления и температуры – от критериев Маха и Пуассона. При записи модифицированных уравнений следует ввести дополнительные безразмерные аргументы, соответствующие воздействиям на поток газа, которые здесь являются физическими условиями однозначности.

8.3.2. Полные параметры и характерные скорости

При составлении безразмерных плотности, давления, температуры в качестве масштабов ρ, p, T берут их «полные» значения, достигаемые при энергоизолированном (для p и ρ еще и обратимом) торможении потока до полной остановки.

Полные параметры T^0 и p^0 являются максимально возможными значениями T и p для данного энергоизолированного потока. Величина T^0 характеризует удельное значение полной энергии потока газа, что хорошо видно из уравнения энергии в форме (8.18):

$$c_v T + p/\rho + w^2/2 = c_p T^0 \quad (8.29)$$

(напомним, что $c_v T + p/\rho = c_p T$). Величина p^0 может служить характеристикой удельного значения полной механической энергии потока газа.

Поэтому полные температура и давление есть важнейшие характеристики потока газа. Существенно еще одно обстоятельство: в энергоизолированных потоках полное давление оказывается «аналогом» энтропии. Действительно, поскольку переход от T, p, ρ к T^0, p^0, ρ^0 изэнтропен, можно записать известную формулу изменения энтропии как

$$s_2 - s_1 = c_p \ln(T_2^0 / T_1^0) - R \ln(p_2^0 / p_1^0),$$

откуда

$$p_2^0 / p_1^0 = (T_2^0 / T_1^0)^{k/(k-1)} e^{(s_1 - s_2)/R}, \quad (8.30)$$

что для энергоизолированного потока дает

$$p_2^0 / p_1^0 = e^{(s_1 - s_2)/R}.$$

Следовательно, необратимость в таком потоке, сопровождающаяся ростом энтропии, приводит к эквивалентному падению полного давления. Поэтому величина падения p^0 есть индикатор степени необратимости процесса в энергоизолированном потоке.

Значение полной температуры находят из уравнения (8.29) с учетом связей $c_p / R = k / (k - 1)$, $p = \rho RT$ и выражения (8.27):

$$T^0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{kRT} \right) = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right). \quad (8.31)$$

Расчет p^0 и ρ^0 ведут по формулам изэнтропного процесса:

$$\frac{p^0}{p} = \left(\frac{T^0}{T} \right)^{k/(k-1)}; \quad \frac{\rho^0}{\rho} = \left(\frac{T^0}{T} \right)^{1/(k-1)}. \quad (8.32)$$

Как аргумент безразмерных уравнений одномерного течения газа, критерий Маха $M = w / a$ не всегда удобен: для вычисления его нужна местная скорость звука (8.27), которая является функцией термодинамических параметров, меняющихся вдоль потока. Лучшей будет безразмерная скорость, масштаб которой напрямую связан с полной температурой (она постоянна в энергоизолированном потоке).

Этому требованию к масштабной величине удовлетворяют скорость звука в покое газе a^0 , критическая скорость $a^* = W^*$ и максимальная скорость W_{\max} .

Действительно, скорость звука в покое газе согласно (8.27) равна $a^0 = \sqrt{k p^0 / \rho^0}$, что для идеального газа дает

$$a^{0^2} = kRT^0. \quad (8.33)$$

Аналогично для критической скорости будет

$$a^{*2} = \frac{2}{k+1} a^{0^2} = \frac{2k}{k+1} RT^0. \quad (8.34)$$

Это выражение получено из связи величин a и a^0 :

$$a^2 = a^{0^2} - \frac{k-1}{2} W^2, \quad (8.35)$$

следующей из уравнения (8.31). В ней взято $a^* = W^*$, поскольку критической называют скорость в той точке, где скорость потока совпадает с местной скоростью звука.

Максимальной именуют скорость, с которой будет двигаться газ, если весь запас его энергии преобразовать в кинетическую энергию. Согласно уравнению (8.29), имеем

$$W_{\max}^2 = \frac{2}{k-1} a^{0^2} = \frac{2k}{k-1} RT^0. \quad (8.36)$$

Формулу (8.35) можно преобразовать в уравнение эллипса скоростей:

$$\frac{a^2}{a^{0^2}} + \frac{W^2}{W_{\max}^2} = 1. \quad (8.37)$$

График его показан на рис. 8.2, где в качестве оси абсцисс также взяты линии $W/a = M$ и $W/a^* = \Lambda$ (величину Λ называют коэффициентом скорости).

Значение $M = 1$ разделяет график на зоны дозвуковых ($M < 1$) и сверхзвуковых ($M > 1$) скоростей (потоки газа с такими скоростями существенно различаются). Есть также особенности течения при

$M \ll 1$, $M \approx 1$ и $M \gg 1$, поэтому принято еще выделять области течений со слабым проявлением сжимаемости I, околозвуковых II и гиперзвуковых III (рис. 8.2) течений.

Из сравнения значений M и Λ в гиперзвуковой области видно дополнительное преимущество использования в качестве масштаба критической скорости. Величины a^0 и w_{\max} обычно не применяют как масштабные, поскольку значения соответствующих безразмерных скоростей неудобны для разграничения дозвуковых и сверхзвуковых потоков.

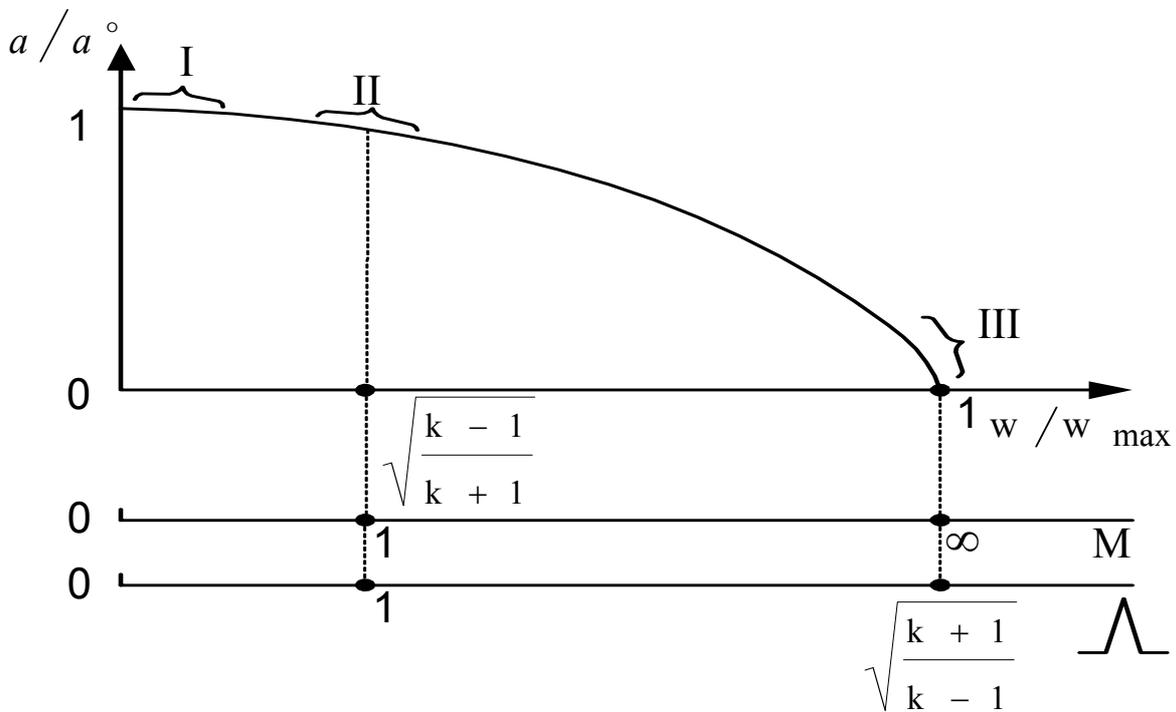


Рис. 8.2.

Представляют интерес связи между величинами M и Λ :

$$M^2 = \frac{2}{k+1} \frac{\Lambda^2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda^2\right)}; \quad (8.38)$$

$$\Lambda^2 = \frac{k+1}{2} \frac{M^2}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}. \quad (8.39)$$

8.3.3. Газодинамические функции τ , π , ε

Безразмерные уравнения неразрывности, движения и энергии для строго одномерных стационарных течений газа (связи отношений ρ/ρ^0 , p/p^0 и T/T^0 с величинами k и M или k и Λ) называют еще *газодинамическими функциями (ГДФ) плотности, давления и температуры*.

Получим зависимости ρ/ρ^0 , p/p^0 и T/T^0 от k и Λ . Газодинамическая функция температуры следует из формул (8.31) и (8.38):

$$\frac{T}{T^0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda^2. \quad (8.40)$$

С учетом этого из выражений (8.32) имеем

$$\frac{p}{p^0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda^2\right)^{k/(k-1)}; \quad (8.41)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda^2\right)^{1/(k-1)}. \quad (8.42)$$

Газодинамические функции температуры, давления и плотности обозначают τ , π , ε соответственно. Графики их по аргументу Λ приведены на рис. 8.3.

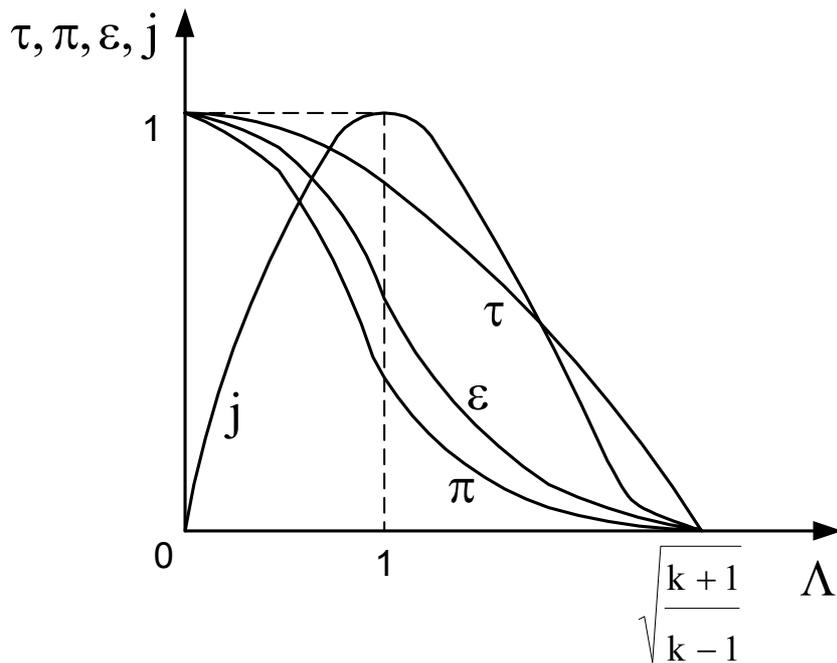


Рис. 8.3

Газодинамические функции τ, π, ϵ , как и другие, введенные ниже, широко используют для упрощения математических выкладок, облегчения логического анализа, сокращения вычислительной работы (ГДФ табулированы). В частности, зная Λ и полные параметры, легко установить все остальные характеристики потока. Наоборот, по величине любой ГДФ нетрудно найти коэффициент скорости или число Маха.

8.3.4. Газодинамические функции расхода и импульса

Газодинамической функцией расхода j называют связь с k и M (или Λ) отношения плотностей потока массы в произвольном и критическом сечениях. В последнем $w = a = a^*$, так что температуру, давление, плотность легко найти по соответствующим ГДФ при $\Lambda = 1$:

$$\frac{T^*}{T^0} = \frac{2}{k+1}; \quad \frac{p^*}{p^0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho^*}{\rho^0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (8.43)$$

Выражение для j по аргументу Λ получают, умножив и разделив на ρ^0 отношение $\rho w / \rho^* w^*$:

$$j(\Lambda) = \Lambda \varepsilon(\Lambda) \left(\frac{k+1}{2} \right)^{1/(k-1)}. \quad (8.44)$$

График функции j по аргументу Λ приведен на рис. 8.3.

Газодинамической функцией импульса z именуют зависимость от k и M (или Λ) удвоенного отношения потоков полного импульса в произвольном и критическом сечениях. Если учесть, что поток полного импульса в одномерном течении определен как

$$I = (p + \rho w^2)A = pA + \dot{m}w = \dot{m}w \left[1 + 1/(kM^2) \right], \quad (8.45)$$

то отношение $2I/I^*$ имеет вид

$$\frac{2I}{I^*} = \frac{2k}{k+1} \Lambda \left(1 + \frac{1}{kM^2} \right).$$

Подстановка в это выражение связи (8.38) дает

$$z(\Lambda) = \frac{2k}{k+1} \Lambda \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{2k}{k+1} \frac{\Lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda^2} \right)} \right].$$

Дальнейшие преобразования приводят к простому соотношению

$$z(\Lambda) = \Lambda + 1/\Lambda. \quad (8.46)$$

График ГДФ z по аргументу Λ приведен на рис. 8.4.

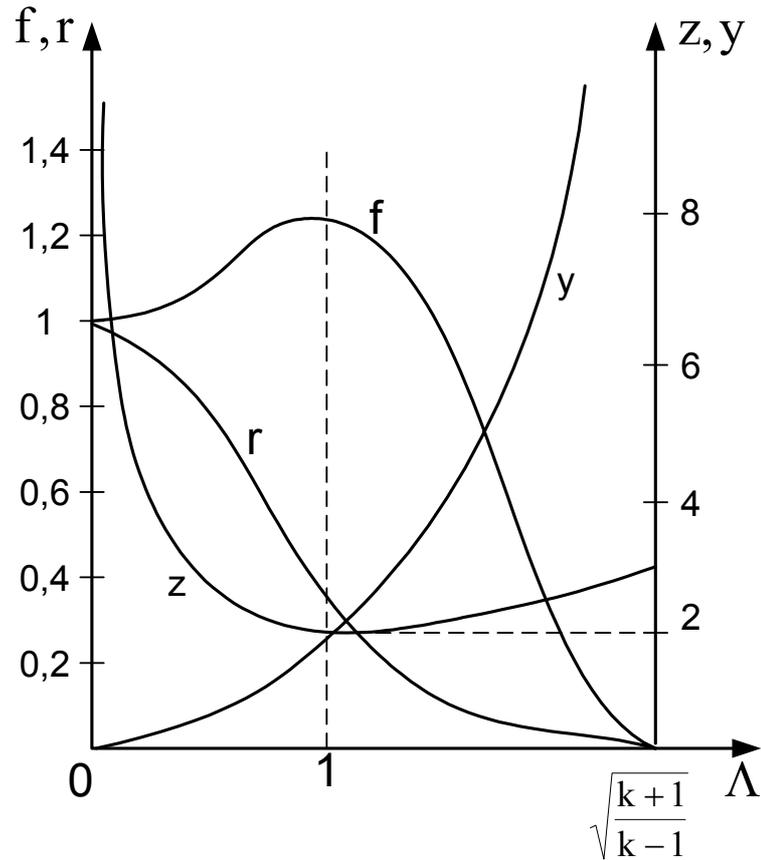


Рис. 8.4

Как видно из рис. 8.3, каждому значению j , кроме $j = 1$, соответствует две величины Λ : одна $\Lambda < 1$, другая $\Lambda > 1$. То же имеет место для значений z в пределах $2 < z \leq 2k / \sqrt{k^2 - 1}$ (см. рис. 8.4). Поэтому при отыскании Λ по величине j или z необходимо еще знать, каков поток – дозвуковой или сверхзвуковой.

Введение функций j и z позволяет получить удобные выражения потоков массы и полного импульса через ГДФ и полные параметры. Так, для *потока массы* $\dot{m} = \rho w A$ имеем *уравнение Христиановича*:

$$\dot{m} = j \frac{p^0}{\sqrt{T^0}} A \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/(k-1)}} \quad (8.47)$$

Для потока полного импульса $I = zI^* / 2$ будет

$$I = z\sqrt{T^0} \dot{m} \sqrt{\frac{k+1}{2k}} R. \quad (8.48)$$

С учетом (8.47) это выражение можно переписать в виде

$$I = zj p^0 A \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} = f p^0 A, \quad (8.49)$$

где

$$f = zj \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \quad (8.50)$$

есть дополнительная газодинамическая функция.

Иногда потоки \dot{m} и I выражают через термодинамическое давление, умножив и разделив на p зависимости (8.47) и (8.49):

$$\dot{m} = y \frac{p}{\sqrt{T^0}} A \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/(k-1)}}, \quad (8.51)$$

$$I = pA / r. \quad (8.52)$$

Здесь введены дополнительные ГДФ:

$$y = j / \pi ; r = \pi / f. \quad (8.53)$$

Графики ГДФ f , y , r по аргументу Λ представлены на рис. 8.4

8.3.5. Запись одномерных уравнений течения газа через газодинамические функции и полные параметры

ГДФ температуры, давления и плотности представляют собой безразмерные строго одномерные уравнения стационарного течения газа. Используя ГДФ и полные параметры, можно также получить удобные формы записи одномерных уравнений для течений газа с воздействиями.

С учетом зависимостей (8.47), (8.49) и возможности представления удельного значения полной энергии потока произведением $c_p T^0$, перепишем систему (8.19)-(8.21) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} j_2 \frac{p_2^0}{\sqrt{T_2^0}} A_2 - j_1 \frac{p_1^0}{\sqrt{T_1^0}} A_1 = \sum_i j_i \frac{p_i^0}{\sqrt{T_i^0}} A_i ; \end{array} \right. \quad (8.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2 p_2^0 A_2 - f_1 p_1^0 A_1 = R_{l_{12}} - \sum_i f_i p_i^0 A_i \cos(\vec{n}_i, \vec{l}); \end{array} \right. \quad (8.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j_2 \sqrt{T_2^0} p_2^0 A_2 - j_1 \sqrt{T_1^0} p_1^0 A_1 = \sum_i j_i \sqrt{T_i^0} p_i^0 A_i + \\ + (Q_{12} - L_{\text{тех}12}) / \left[\frac{k}{k-1} \sqrt{kR} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)(k-1)} \right]. \end{array} \right. \quad (8.56)$$

Здесь \vec{n}_i – внешняя нормаль к поперечному сечению A_i прямого патрубка, через который идет массообмен; величинам j_i присваивается знак « + » при вводе массы m_i и знак « - » при выводе ее; вводимый газ имеет те же значения R и k , что и основной (они неизменны вдоль потока).

Если массообмена нет, система упрощается:

$$\left\{ \begin{array}{l} (j_2 p_2^0 A_2) / \sqrt{T_2^0} - (j_1 p_1^0 A_1) / \sqrt{T_1^0} = 0; \\ f_2 p_2^0 A_2 - f_1 p_1^0 A_1 = R_{l_{12}}; \\ T_2^0 - T_1^0 = (q_{12} - l_{\text{тех}12}) / \left[\frac{k}{k-1} R \right], \end{array} \right. \quad (8.57)$$

где q_{12} и $l_{\text{тех}12}$ – отнесенные к единице массового расхода количества теплоты и работы на участке 1-2.

В случае отсутствия как массообмена, так и энергообмена имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} j_2 p_2^0 A_2 - j_1 p_1^0 A_1 = 0; \\ f_2 p_2^0 A_2 - f_1 p_1^0 A_1 = R'_{l_{12}}; \\ T_2^0 - T_1^0 = 0, \end{array} \right. \quad (8.58)$$

где $R'_{l_{12}}$ – проекция на линию l силы действия неподвижных стенок канала. Для строго одномерного течения получаем

$$\begin{cases} j_2 p_2^0 = j_1 p_1^0; \\ z_2 = z_1; \\ T_2^0 = T_1^0. \end{cases} \quad (8.59)$$

8.4. Математическая модель прямого скачка

8.4.1. Схема возникновения разрыва непрерывности

Рассмотрим адиабатный процесс распространения сильной волны сжатия (уплотнения) в покоящемся идеальном газе. В месте своего нахождения такая волна увеличивает значения плотности, давления, температуры на конечную величину. Представим сильное возмущение суммой слабых (рис. 8.5). Каждое из них распространяется со скоростью звука, которая согласно (8.27) является функцией температуры. Поэтому слабые возмущения в более нагретых областях перемещаются быстрее. В результате этого сильная волна уплотнения деформируется, становясь все круче.

В пределе она превращается в *ударную волну*, в которой конечное изменение параметров происходит на длине свободного пробега молекул. Поскольку в модели континуума эту длину считают пренебрежимо малой, ударную волну здесь заменяют разрывом непрерывности параметров, то есть скачкообразным изменением их. В одномерных задачах плоскость разрыва расположена под прямым углом к направлению течения, поэтому такие разрывы называют *прямыми скачками*.

Аналогичное рассмотрение адиабатного процесса распространения сильной волны расширения (разрежения) показывает, что она в ходе деформации становится все более полой и в пределе вырождается в слабую волну. Таким образом, адиабатные волны разрежения скачков не дают. Однако в неадиабатных системах скачки разрежения возможны (например, во фронте пламени). В дальнейшем рассматриваем только адиабатные скачки.

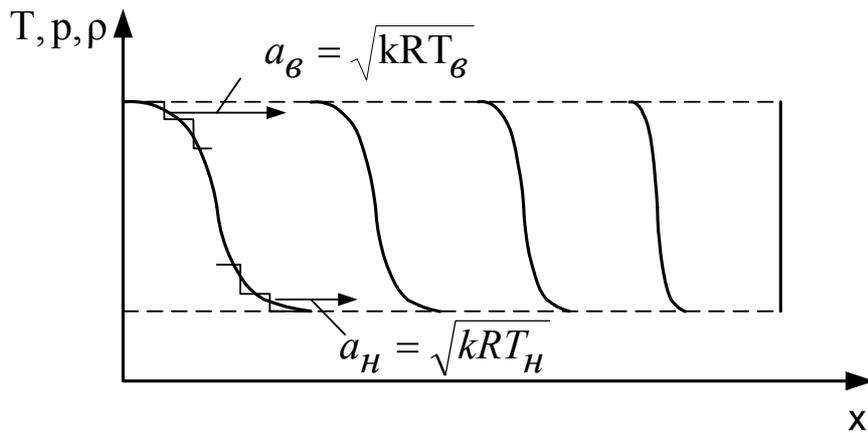


Рис. 8.5

Подчеркнем, что ударные волны возникают вследствие *сжимаемости* среды, ибо только в газе скорость распространения возмущения конечна и зависит от параметров среды. Однако в скачок может превратиться лишь сильное возмущение. Единичная слабая волна перемещается по газу без деформации.

8.4.2. Условия динамической совместности и рабочие формулы для прямого скачка

Условиями динамической совместности называют связи между параметрами по обе стороны скачка, следующие из законов сохранения. Эти условия устанавливаются, применяя интегральные уравнения к конечному объему газа, содержащему поверхность разрыва.

Обратим задачу, представленную выше: рассматриваем не распространение ударной волны в покоящемся газе, а перетекание газа через неподвижный скачок. Ввиду строгой одномерности течения плотности потоков массы, импульса, энергии при переходе через скачок неизменны. Поэтому для точек 1 и 2, расположенных перед и за скачком, имеем:

$$\begin{cases} \rho_2 w_2 = \rho_1 w_1; \\ p_2 + \rho_2 w_2^2 = p_1 + \rho_1 w_1^2; \\ c_p T_2 + w_2^2 / 2 = c_p T_1 + w_1^2 / 2. \end{cases} \quad (8.60)$$

При записи этих уравнений через ГДФ и полные параметры получаем систему (8.59).

Условия динамической совместности замыкают термическим уравнением состояния идеального газа, считая, что повышение температуры в скачке не влечет за собой изменение величин R и k (в скачках большой интенсивности это условие может нарушаться).

На практике в качестве математической модели прямого скачка используют не условия (8.59) или (8.60), а вытекающие из них рабочие формулы (связи отношений одноименных параметров до и после скачка с числами M или Λ перед скачком). Получим рабочие формулы для w, T, p, ρ по аргументу Λ_1 .

Связь w_2/w_1 с Λ_1 найдем из второго условия (8.59): $\Lambda_2 + 1/\Lambda_2 = \Lambda_1 + 1/\Lambda_1$. Это уравнение имеет два решения: $\Lambda_2 = \Lambda_1$ и $\Lambda_2 = 1/\Lambda_1$; второе из них отвечает скачку уплотнения при $\Lambda_1 > 1$. Действительно, если $\Lambda_1 > 1$, то $\Lambda_2 < 1$, так что $w_2 < w_1$ ввиду сохранения значения T^0 . Согласно первому условию (8.60) это означает, что $\rho_2 > \rho_1$.

Следовательно, адиабатные скачки возникают только в сверхзвуковых потоках, причем поток на прямом скачке тормозится так, что становится дозвуковым. Чем выше скорость Λ_1 , тем сильнее торможение потока (тем больше интенсивность скачка).

Соотношение $\Lambda_2 = 1/\Lambda_1$ можно переписать в виде

$$\Lambda_2 / \Lambda_1 = 1 / \Lambda_1^2, \quad w_2 / w_1 = 1 / \Lambda_1^2. \quad (8.61)$$

Последняя формула с учетом первого условия (8.60) дает

$$\rho_2 / \rho_1 = \Lambda_1^2. \quad (8.62)$$

Ввиду неизменности T^0 при переходе через скачок имеем

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_2^0} \cdot \frac{T_1}{T_1^0} = \frac{\tau(\Lambda_2)}{\tau(\Lambda_1)},$$

или

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\Lambda_1^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda_1^2}. \quad (8.63)$$

Поскольку $p = \rho RT$, для p_2 / p_1 будет

$$\frac{p_2}{p_1} = \Lambda_1^2 \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda_1^2}. \quad (8.64)$$

В предельном случае $W_1 \rightarrow W_{\max}$ из уравнений (8.62) – (8.64), с учетом $\Lambda_1^2 \rightarrow \Lambda_{\max}^2 = (k+1)/(k-1)$, имеем

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{k+1}{k-1}; \quad \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty; \quad \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \infty.$$

Полная температура при переходе газа через адиабатный скачок не меняется, а для p^0 из (8.59) получаем

$$\frac{p_2^0}{p_1^0} = \frac{j(\Lambda_1)}{j(\Lambda_2)} = \Lambda_1^2 \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda_1^2} \right)^{1/(k-1)}. \quad (8.65)$$

Анализ этой формулы показывает, что в прямом скачке полное давление падает, и тем сильнее, чем больше Λ_1 (при $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_{\max}$ будет $p_2^0 / p_1^0 \rightarrow 0$).

Падение полного давления на скачке в энергоизолированном потоке означает, что торможение газа здесь необратимо (см. подразд. 8.3.2). На необратимость процесса указывает и несовпадение связи между p_2 / p_1 и ρ_2 / ρ_1 на адиабатном скачке с уравнением обратимой адиабаты $p_2 / p_1 = (\rho_2 / \rho_1)^k$. Действительно, из (8.64) имеем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (8.66)$$

В отличие от обратимой адиабаты Пуассона адиабату (8.66) называют *ударной* (адиабатой Гюгионо). Ее уравнение (8.66) часто представляют в виде

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = k \frac{p_2 + p_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (8.67)$$

Отметим в заключение, что необратимость процесса перехода через скачок связана именно с резким изменением параметров, так как все приведенные выше формулы для скачка соответствуют однородному невязкому нетеплопроводному газу.

8.5. Закон обращения воздействий

Рассмотрим одномерное движение идеального газа с *воздействиями*, приняв, что газ подводят и отводят по нормали к направлению течения, причем параметры подводимого и основного газа в сечении подвода одинаковы. Для такого случая система уравнений в полных дифференциалах (см. подразд. 8.2.2) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\rho w A) = \delta m; \\ w dw = -dp / \rho - \delta l_{\text{тех}} - \delta l_{\text{тр}}; \\ d(c_p T + w^2 / 2) = \delta q - \delta l_{\text{тех}}; \\ dp = d(\rho R T). \end{array} \right. \quad (8.68)$$

При заданных воздействиях $dA, \delta m, \delta l_{\text{тех}}, \delta l_{\text{тр}}, \delta q$ система замкнута. Найдем из нее зависимость скорости потока от величины воздействий. Для этого подставим в уравнение движения значения dp / ρ из уравнения состояния $dp / \rho = RT dp / \rho + R dT$, предварительно заменив в нем $d\rho / \rho$ по уравнению неразрывности

$$d\rho / \rho + dw / w + dA / A = \delta m / \dot{m}$$

и значение dT по уравнению энергии

$$dT = (\delta q - \delta l_{\text{тех}} - w dw) / c_p.$$

Учитывая, что $RT = a^2 / k$ и $R / c_p = (k - 1) / k$, после умножения полученного выражения на k / a^2 окончательно имеем:

$$(1 - M^2) \frac{dw}{w} = \frac{\delta m}{\dot{m}} - \frac{dA}{A} + \frac{1}{a^2 \delta l_{\text{тех}}} + \frac{k}{a^2 \delta l_{\text{тр}}} + \frac{k - 1}{a^2 \delta q}. \quad (8.69)$$

Наличие множителя $(1 - M^2)$ здесь позволяет утверждать, что любое воздействие неизменного знака противоположно влияет на скорость дозвукового и сверхзвукового потока. Это утверждение называют *законом обращения воздействий*. Поскольку скорость связана с термодинамическими параметрами потока, закон распространяют и на такие параметры: изменение их под влиянием воздействия обратно в дозвуковом и сверхзвуковом потоках.

Из закона обращения воздействий вытекают два *следствия*:

- при стационарном непрерывном течении невозможно превращение дозвукового потока в сверхзвуковой и наоборот за счет одного воздействия неизменного знака;

- для «перевода» скорости потока через значение $W = a = a^*$ необходимо в момент достижения его изменить знак воздействия.

Закон обращения воздействий справедлив только для газа, ибо он является следствием сжимаемости среды (об этом говорит присутствие в его уравнении числа Маха). Отметим, что уравнение (8.69) хорошо иллюстрирует одну из особенностей *околозвукового* потока, а именно, его крайнюю чувствительность к воздействию.

Невозможность перевода скорости потока через значение $W = a = a^*$ за счет одного воздействия неизменного знака трактуют как *кризис воздействия*. Он возможен для воздействий, ускоряющих дозвуковой поток и тормозящих сверхзвуковой.

Наряду с указанным применяют также термин «запирание потока», имея в виду, что наступление критического режима в конце участка воздействия ограничивает расход, который «пропускает» канал с воздействием. Действительно, при $\Lambda = 1$ ГДФ расхода приобретает наибольшее значение $j(\Lambda) = 1$ (рис. 8.3), и, согласно уравнению (8.47), расход через участок определится площадью критического сечения A^* и значением полных параметров в нем.

8.6. Течения газа с воздействиями

8.6.1. Геометрическое воздействие

Рассмотрим энергоизолированное обратимое течение газа в канале переменного сечения с постоянным по длине расходом.

Исходя из условий задачи, уравнения (8.69) и графиков ГДФ τ , π , ε (рис. 8.3) составляем таблицу качественного изменения параметров газа по длине канала:

	M < 1		M > 1	
	dA < 0	dA > 0	dA < 0	dA > 0
w	↑	↓	↓	↑
ρ	↓	↑	↑	↓
p	↓	↑	↑	↓
T	↓	↑	↑	↓
p^0	const	const	const	const
T^0	const	const	const	const

Количественное влияние площади сечения A на параметры определим на примере течения в *соплах*, то есть каналах для ускорения потока. В прямой задаче здесь заданы расход газа \dot{m} , параметры на входе (T^0, p^0, Λ_{BX}) , противодавление p_{II} и уравнение контура сопла $A = A(x)$. В основе расчета лежит уравнение Христиановича (8.47).

В зависимости от располагаемого перепада давлений p_{II} / p^0 *простое* (сужающееся) *сопло* может работать на режимах $W_c < a^*$ и $W_c = a^*$ (W_c – скорость на срезе сопла). Первый из них наблюдают при докритических перепадах давлений $1 > p_{II} / p^0 > p^* / p^0$. В этом случае давление на срезе сопла p_c всегда равно p_{II} , ибо волны возмущения, возникающие при $p_c \neq p_{II}$ и распространяющиеся со скоростью звука, достигают сопла и устраняют рассогласование p_c и p_{II} . Если $p_{II} / p^0 \leq p^* / p^0$ (критический и закритический перепады) реа-

лизуется режим $W_c = a^*$ из-за невозможности перемещения волн разрежения «вверх» по струе, истекающей со скоростью звука.

Расчет простого сопла начинают с определения коэффициента скорости на срезе Λ_c . При докритических перепадах используют соотношение

$$p_n/p^0 = \pi(\Lambda_c). \quad (8.70)$$

В случае критических и закритических перепадов $\Lambda_c = 1$.

Далее по уравнению (8.47) вычисляют площадь поперечного сечения входа и среза сопла. Значения T, p, ρ, w в текущих сечениях A находят по схеме:

$$\begin{array}{c}
 A = A(x) \\
 \downarrow \\
 x \Rightarrow A \Rightarrow j(\Lambda) \Rightarrow \Lambda \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau(\Lambda) \Rightarrow T = T^0 \tau(\Lambda), \\ \pi(\Lambda) \Rightarrow p = p^0 \pi(\Lambda), \\ \rho = p/RT. \end{array} \right. \quad (8.71) \\
 \uparrow \\
 w = \Lambda a^*
 \end{array}$$

$$A_{\text{вх}} j(\Lambda_{\text{вх}}) = A j(\Lambda)$$

Использованное здесь соотношение

$$A_{\text{вх}} j(\Lambda_{\text{вх}}) = A j(\Lambda) \quad (8.72)$$

следует из уравнения Христиановича (по условию задачи значения T^0, p^0, \dot{m}, k, R неизменны вдоль сопла). На шаге $j(\Lambda) \Rightarrow \Lambda$ для простых сопел берут $\Lambda \leq 1$.

Чтобы получить скорость истечения $W_c > a^*$, необходимо (согласно закону обращения воздействий) дополнить сужающееся сопло расширяющимся, состыковав их по минимальному сечению («горлу»).

При расчете таких сопел Лавала вначале по формуле (8.70) определяют коэффициент скорости на срезе сопла Λ_c . Затем находят площадь входа, горла и среза по уравнению (8.47), подставляя в него значения $\Lambda_{\text{вх}}, \Lambda_{\Gamma} = 1$ и Λ_c . Далее применяют схему (8.71), в которой на шаге $j(\Lambda) \Rightarrow \Lambda$ берут $\Lambda < 1$ для сужающейся части и $\Lambda > 1$ – для расширяющейся. Полученное распределение параметров (для давления – монотонно ниспадающая линия на рис. 8.6) отвечает расчетному режиму, признаком которого является совпадение давления на срезе

сопла p_{c_p} и противодействия p_{Π} при сверхзвуковой скорости истечения.

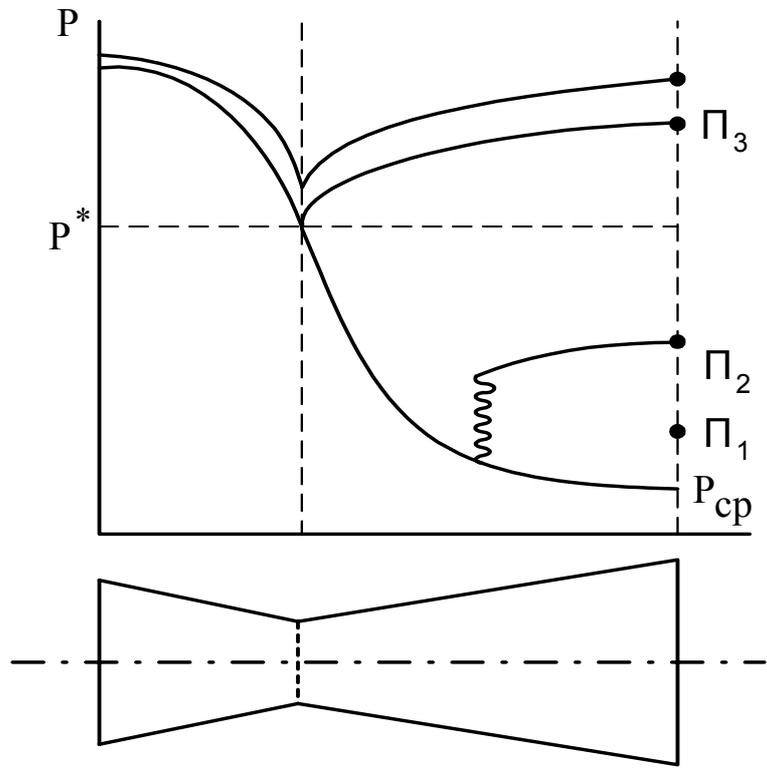


Рис. 8.6

Отклонение p_{Π} от p_{c_p} приводит к нерасчетным режимам работы сопла Лавая. В случае *недорасширения* ($p_{\Pi} < p_{c_p}$) распределение параметров по всей длине остается таким же, как на расчетном режиме. Если имеет место *перерасширение* ($p_{\Pi} > p_{c_p}$), то это распределение зависит от степени нерасчетности.

При малом отклонении p_{Π} / p_{c_p} от единицы (точка « Π_1 » на рис. 8.6) оно совпадает с полученным для режима $p_{\Pi} = p_{c_p}$. Большая нерасчетность приводит к образованию ударной волны, которая может распространяться против сверхзвукового потока. Согласно формуле (8.66), при

$$p_{\Pi} / p_{c_p} = \Lambda_c^2 \tau(1 / \Lambda_c) / \tau(\Lambda_c) \quad (8.73)$$

ударная волна (скачок) размещается на срезе сопла. В случае еще большей степени нерасчетности (точка « Π_2 » на рис. 8.6) она располагается в пределах расширяющейся части. При этом непрерывное ускорение газа в сопле Лавала невозможно: скорость в скачке падает до значения $\Lambda_{\text{СК}2} < 1$, после чего продолжает уменьшаться так, что давление на срезе сопла становится равным противодавлению.

На режиме перерасширения со скачком в расширяющейся части сопла распределение параметров от входа до скачка соответствует расчетному, после скачка оно отвечает схеме (8.71), в которой $A_{\text{ВХ}}$ и $j(\Lambda_{\text{ВХ}})$ заменены на $A_{\text{СК}}$ и $j(\Lambda_{\text{СК}2})$. Интенсивность и положение скачка находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} A_{\Gamma} = A_{\text{СК}} j(\Lambda_{\text{СК}1}); \\ \Lambda_{\text{СК}2} = 1 / \Lambda_{\text{СК}1}; \\ A_{\text{СК}} j(\Lambda_{\text{СК}2}) = A_{\text{ВЫХ}} j(\Lambda_{\text{ВЫХ}}); \\ p_{\Pi} / p_{\text{СК}2}^0 = \pi(\Lambda_{\text{ВЫХ}}); \\ p_{\text{СК}2}^0 / p_{\text{ВХ}}^0 = j(\Lambda_{\text{СК}1}) / j(\Lambda_{\text{СК}2}). \end{cases} \quad (8.74)$$

Наличие скачка нарушает обратимость течения, что учтено введением в систему рабочей формулы для полного давления (8.65).

По мере увеличения степени перерасширения по сравнению с (8.73) скачок перемещается к горлу. Здесь он исчезает, а по всей расширяющейся части сопла наступает дозвуковое течение (такому противодавлению на рис. 8.6 отвечает точка « Π_3 »). Дальнейшее увеличение p_{Π} делает невозможным достижение в горле критической скорости, и сопло переходит в режим работы *трубы Вентури*. При этом заданный расход \dot{m} не может пройти через горло, и распределение параметров отличается от расчетного по всей длине «канала с горлом».

8.6.2. Воздействие сил трения

Рассмотрим прямую задачу об энергоизолированном течении вязкого газа с постоянным расходом в трубе неизменного поперечного сечения, учитывая условие $\delta l_{\text{тр}} > 0$.

Исходя из уравнений (8.69), $\rho w = \text{const}$, графика ГДФ τ и условий задачи устанавливаем направление изменения параметров под воздействием трения:

	$M < 1$	$M > 1$
w	↑	↓
ρ	↓	↑
p	↓	↑
T	↓	↑
p^0	↓	↓
T^0	const	const

В основе математической модели течения газа в «трубе с трением», лежит уравнение, связывающее коэффициенты скорости во входном и текущем сечениях с расстоянием между ними и линейным коэффициентом сопротивления ξ . Такое уравнение следует из соответствующей части выражения (8.69) $(1 - M^2) dw / w = (k / a^2) \delta l_{\text{тр}}$ с учетом формул (8.38), (8.8) и (8.10):

$$\frac{d\Lambda}{\Lambda^3} - \frac{d\Lambda}{\Lambda} = \frac{k}{k+1} \xi \frac{dx}{d}. \quad (8.75)$$

Его интегрируют при $\xi = \text{const}$, поскольку для большинства практически важных течений газа эта величина сравнительно слабо зависит от числа Рейнольдса (само же оно по длине трубы меняется мало ввиду $\rho w d = \text{const}$).

С учетом этого интегрирование от входа в трубу ($x=0$) до текущего сечения дает:

$$\chi(\Lambda_{\text{вх}}) - \chi(\Lambda) = \frac{2k}{k+1} \xi \frac{x}{d}, \quad (8.76)$$

где $\chi(\Lambda) = 1 / \Lambda^2 + \ln \Lambda^2$.

По уравнению (8.76) находят коэффициент скорости в текущем сечении при заданном $\Lambda_{\text{вх}}$. Зная Λ , по ГДФ τ, π, ε и формуле $w = \Lambda a^*$ вычисляют величины T, p, ρ и w . Полное давление определяют по выражению

$$p^0 / p_{\text{вх}}^0 = j(\Lambda_{\text{вх}}) / j(\Lambda), \quad (8.77)$$

следующему из уравнения Христиановича.

Такая схема расчета годится при условии, что

$$\frac{2k}{k+1} \xi \frac{l}{d} \leq [\chi(\Lambda_{\text{вх}}) - 1], \quad (8.78)$$

где l – длина трубы (левую часть этого соотношения называют приведенной длиной трубы $l_{\text{пр}}$). Если $l_{\text{пр}}$ превышает значение $l_{\text{пр}}^* = \chi(\Lambda_{\text{вх}}) - 1$, то наступает кризис воздействия: становится невозможным непрерывное стационарное течение с заданными значениями $l_{\text{пр}}$ и $\Lambda_{\text{вх}}$.

Опыт показывает, что при $\Lambda_{\text{вх}} < 1$ эта ситуация разрешается нестационарной перестройкой потока, в результате которой возникает новое установившееся течение. Оно опять удовлетворяет основному уравнению (8.76) за счет снижения коэффициента скорости на входе до значения $\Lambda'_{\text{вх}}$ (рис. 8.7,а). Его находят, приравняв заданную $l_{\text{пр}}$ величине $\chi(\Lambda'_{\text{вх}}) - 1$, поскольку выходное сечение трубы здесь является критическим.

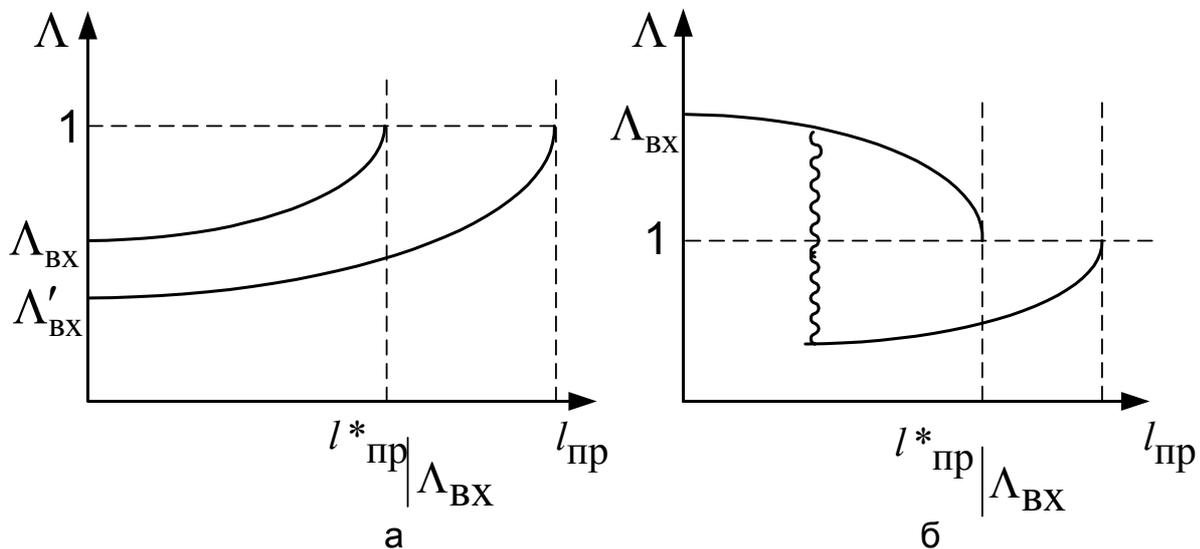


Рис. 8.7

В случае $\Lambda_{\text{вх}} > 1$ закритическое количество воздействия «вызывает» скачок такой, что при заданных $l_{\text{пр}}$ и $\Lambda_{\text{вх}}$ реализуется критический режим на срезе трубы (рис. 8.7,б). Интенсивность и положение скачка определяют по системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi(\Lambda_{\text{ВХ}}) - \chi(\Lambda_{\text{СК1}}) = \frac{2k}{k+1} \xi \frac{x_{\text{СК}}}{d}, \\ \Lambda_{\text{СК2}} = 1/\Lambda_{\text{СК1}}, \\ \chi(\Lambda_{\text{СК2}}) - 1 = \frac{2k}{k+1} \xi \frac{l - x_{\text{СК}}}{d}. \end{array} \right. \quad (8.79)$$

Распределение параметров в трубе с закритическим количеством воздействия находят по представленной выше схеме. Однако при $\Lambda_{\text{ВХ}} < 1$ предварительно вычисляют новое значение $\Lambda'_{\text{ВХ}}$, а в случае $\Lambda_{\text{ВХ}} > 1$ применяют схему отдельно для участков до скачка и после него, учитывая падение полного давления на скачке по формуле (8.65).

8.6.3. Тепловое воздействие

Рассмотрим прямую задачу о течении невязкого газа с постоянным расходом в трубе неизменного поперечного сечения при наличии теплообмена.

Исходя из уравнений (8.69) $\rho w = \text{const}$, $\rho w dw = -dp$, $d(c_p T^0) = \delta q$ выясняем изменения параметров w, ρ, p, T^0 соответственно:

		M < 1		M > 1	
		$\delta q < 0$	$\delta q > 0$	$\delta q < 0$	$\delta q > 0$
w		↓	↑	↑	↓
ρ		↑	↓	↓	↑
p		↑	↓	↓	↑
T	$M < \sqrt{1/k}$	↓	↑	↓	↑
	$M > \sqrt{1/k}$	↑	↓		
p^0		↑	↓	↑	↓
T^0		↓	↑	↓	↑

Чтобы установить направление изменения температуры, найдем связь между dT/T и dw/w , подставив в термическое уравнение состояния $dp/p = d\rho/\rho + dT/T$ значения dp и $d\rho$ из уравнений движения и неразрывности:

$$(1 - kM^2)dw/w = dT/T.$$

Отсюда следует, что при $M > 1$ знак dT всегда противоположен знаку dw , а при $M < 1$ соотношение этих знаков различно в случаях $M < \sqrt{1/k}$ и $M > \sqrt{1/k}$.

Для оценки поведения полного давления используем формулы (8.48) и (8.49). Поскольку в рассматриваемом случае нет механического и расходного воздействий, поток полного импульса неизменен, что позволяет записать:

$$z(\Lambda_{\text{ВХ}})/z(\Lambda) = \sqrt{T^0/T_{\text{ВХ}}^0}; \quad (8.80)$$

$$f(\Lambda_{\text{ВХ}})/f(\Lambda) = p^0/p_{\text{ВХ}}^0 \quad (8.81)$$

Используя эти соотношения и графики $z(\Lambda)$ и $f(\Lambda)$, приведенные на рис. 8.4, устанавливаем, что полное давление возрастает при отводе теплоты и падает при подводе ее.

Падение полного давления при подводе теплоты к потоку газа называют *тепловым сопротивлением*, поскольку оно указывает на меньшее увеличение располагаемой энергии газа по сравнению со случаем подвода того же количества теплоты к покоящемуся газу.

Математическую модель течения в «трубе с теплообменом» получают, используя формулы (8.80), (8.81) и уравнение

$$c_p T^0 - c_p T_{\text{ВХ}}^0 = q, \quad (8.82)$$

где q – отнесенная к единице массового расхода теплота, подведенная или отведенная от входа до текущего сечения. Введя *безразмерное количество теплового воздействия* $\bar{q} = q/c_p T_{\text{ВХ}}^0$, перепишем уравнение (8.82) в виде

$$T^0/T_{\text{ВХ}}^0 = \bar{q} + 1. \quad (8.83)$$

Определив текущее значение T^0 , находим по формуле (8.80) ГДФ Z , что позволяет установить величину Λ и далее с помощью ГДФ τ, π, ε и формулы $w = \Lambda a^*$ вычислить значения T, p, ρ, w в теку-

щем сечении участка воздействия. Полное давление p^0 рассчитываем по выражению (8.81).

Такая схема решения прямой задачи пригодна для случаев, когда кризис воздействия невозможен (отвод теплоты) или возможен (подвод теплоты), но количество воздействия не превышает критического значения. Последнее устанавливают по соотношению

$$\bar{q}^* = [z(\Lambda_{\text{вх}})]^2 / 4 - 1, \quad (8.84)$$

представленному графически на рис. 8.8. Выше линии (8.84) здесь расположены значения \bar{q} , для которых невозможно непрерывное стационарное течение с указанными $\Lambda_{\text{вх}}$.

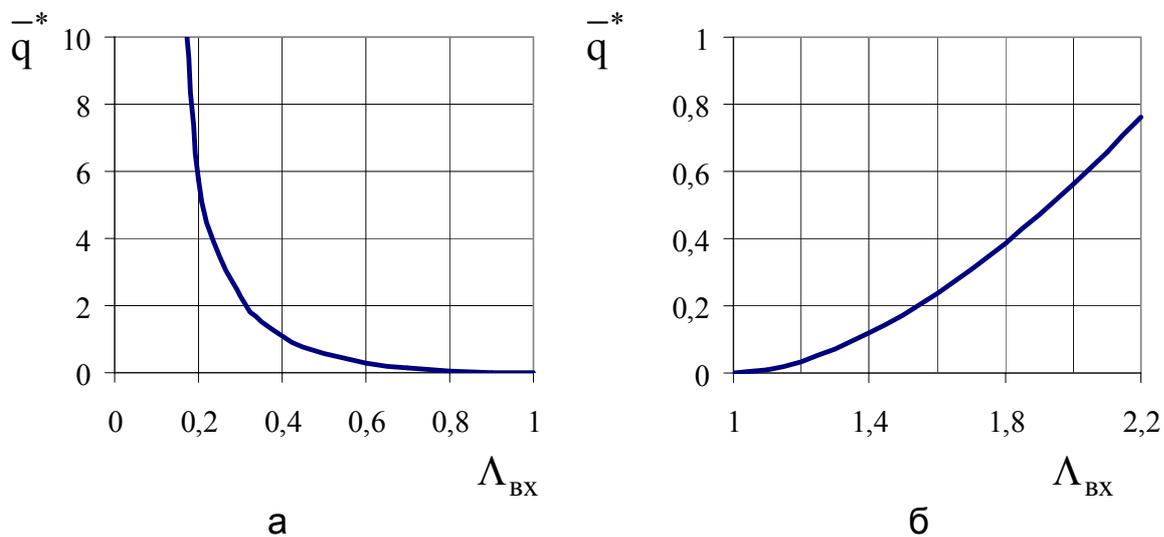


Рис. 8.8

Если $\Lambda_{\text{вх}} < 1$, то при $\bar{q} > \bar{q}^*$ возникает нестационарная перестройка потока, завершающаяся установлением нового течения с меньшим значением коэффициента скорости на входе $\Lambda_{\text{вх}}$. Его вычисляют по формуле (8.84), подставив заданную величину \bar{q} вместо \bar{q}^* (критического значения безразмерного количества теплового воздействия при исходной величине $\Lambda_{\text{вх}}$). В случае $\Lambda_{\text{вх}} > 1$ закритический теплоподвод также приводит к перестройке потока, но в результате ее в расширяющейся части сопла Лавалья, питающего трубу с подогревом, образуется скачок. Он дает на входе в трубу дозвуковую скорость, необходимую для обеспечения заданного теплоподвода при сохранении критического режима на срезе трубы.

Глава 9. ДВУМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

9.1. Особенности описания потенциальных течений жидкости

9.1.1. Система уравнений и граничные условия

Необходимость рассмотрения упомянутых моделей связана с отмеченной в подразд. 7.3.4 возможностью замены крайне сложной задачи динамики вязкой среды двумя более простыми, в одной из которых поток является потенциальным.

Двумерные математические модели обычно создают для *плоских течений* – таких, где частицы движутся параллельно некоторой направляющей плоскости и одинаково во всех точках, лежащих на одном перпендикуляре к ней. Массовыми силами здесь пренебрегают; для жидкости течение считают изотермным. Несжимаемость среды с учетом последнего ограничения обеспечивает замкнутость системы уравнений неразрывности и движения.

Для направляющей плоскости $xу$ будет $w_z = 0$, $\partial/\partial z = 0$, и согласно (7.11) эта система в стационарном случае имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0; \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (9.1)$$

Здесь учтены условие $\vec{f} = 0$ и отсутствие влияния вязкости при потенциальном течении жидкости (см. подразд. 7.3.4).

Уравнения плоского потенциального течения жидкости можно также получить, непосредственно записав условия $\text{div } \vec{w} = 0$ и $\text{rot}_z \vec{w} = 0$ (см. подразд. 6.2.3 и 6.2.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (9.2)$$

Эти условия образуют замкнутую систему для компонент скорости w_x и w_y . Давление определяют по интегралу Бернулли (7.18), который здесь принимает вид

$$w_x^2 / 2 + w_y^2 / 2 + p / \rho = \text{const.} \quad (9.3)$$

Систему (9.2) можно заменить одним уравнением

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (9.4)$$

подставив в равенство $\text{div } \vec{w} = 0$ соотношения $w_x = \partial \Phi / \partial x$ и $w_y = \partial \Phi / \partial y$, вытекающие из условия $\text{rot}_z \vec{w} = 0$ (см. подразд. 6.2.4). Как видно, *потенциал скорости* Φ в случае несжимаемой среды удовлетворяет *уравнению Лапласа*. Решив его, дифференцированием Φ определяем w_x, w_y и далее по выражению (9.3) ищем поле давления $p(x, y)$.

Константу в интеграле Бернулли в случае внешней задачи вычисляют по *граничным условиям* на бесконечности, где заданы значения \vec{w}_∞ (или Φ_∞) и p_∞ . На поверхности же неподвижного твердого тела с внешней нормалью \mathbf{n} имеем $w_n = 0$, или $\partial \Phi / \partial n = 0$.

9.1.2. Функция тока и комплексный потенциал

Для плоских течений жидкости можно ввести еще одну скалярную функцию, производные которой по координатам дают компоненты скорости. Действительно, уравнение неразрывности $\text{div } \vec{w} = 0$ удовлетворится тождественно, если принять

$$w_x = \partial \Psi / \partial y; \quad w_y = -\partial \Psi / \partial x. \quad (9.5)$$

Введенная таким образом *функция тока* $\Psi(x, y)$ обладает важными свойствами. Так, подстановка выражения (9.5) в уравнение (6.10) показывает, что вдоль линии тока значение $\Psi(x, y)$ неизменно. Разность же значений $\Psi(x, y)$ на каких-либо линиях тока равна объемному расходу \dot{V} жидкости между ними.

Подстановка соотношений (9.5) в условие потенциальности течения $\text{rot}_z \vec{w} = 0$ дает

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad (9.6)$$

то есть здесь функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа. Решив его, находим компоненты скорости по соотношениям (9.5) и распределение давления по интегралу (9.3).

Сопоставляя выражения для компонент скорости, записанные через Φ и Ψ , получаем равенства

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (9.7)$$

Сравнивая их с условиями Коши-Римана, видим, что потенциал скорости и функцию тока можно рассматривать как действительную и мнимую части некоторой аналитической функции комплексной переменной $z = x + iy$:

$$\Phi(x, y) + i\Psi(x, y) = \chi(z). \quad (9.8)$$

Введение комплексного потенциала $\chi(z)$ позволяет решать задачи плоского потенциального течения жидкости с помощью аппарата теории функций комплексной переменной.

9.1.3. Метод суперпозиции

Поскольку потенциал скорости и функция тока удовлетворяют уравнению Лапласа, суммы нескольких величин Φ или Ψ представляют собой соответственно потенциал скорости или функцию тока течения, являющегося результатом суперпозиции тех течений, для которых были взяты складываемые величины.

Опыт показывает, что любой потенциальный поток жидкости можно получить суперпозицией некоторого числа трех простейших течений: «параллельного» (рис. 9.1,а), «от источника» (рис. 9.1,б) и «от вихря» (рис. 9.1,в). Им соответствуют такие комплексные потенциалы:

$$\chi(z) = w_{\infty} z; \quad (9.9)$$

$$\chi(z) = (\dot{V} / 2\pi) \ln z; \quad (9.10)$$

$$\chi(z) = (\Gamma / 2\pi i) \ln z. \quad (9.11)$$

Здесь w_{∞} – скорость параллельного оси x потока; \dot{V} и Γ – интенсивности источника и вихря, расположенных в начале координат.

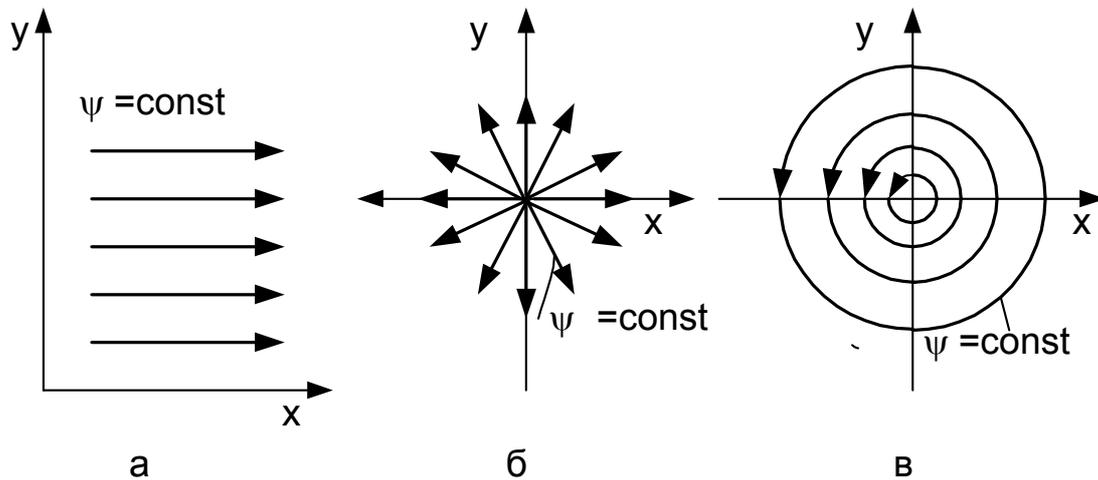


Рис. 9.1

Положительное значение \dot{V} соответствует течению из источника, величина Γ имеет знак «+» при движении частиц против часовой стрелки. Точки, в которых расположены источник или вихрь, исключают из рассмотрения как особые (в них скорость обращается в бесконечность). Поэтому наличие вихрей не противоречит потенциальности всего течения: при распределении скорости по соотношению (9.11) частицы движутся по круговым траекториям, не вращаясь относительно собственных осей, так что циркуляция скорости по любому контуру, не охватывающему сам вихрь, здесь равна нулю.

При подборе совокупности источников и вихрей, которая бы так деформировала исходный параллельный поток, как это делает обтекаемое им твердое тело, следует выполнить три условия:

- одна из линий тока замкнута и полностью повторяет контур тела;
- источники внутри замкнутой линии тока имеют нулевую суммарную мощность \dot{V}_Σ ;
- общая интенсивность вихрей в этой области равна циркуляции скорости, создаваемой в потоке исследуемым телом.

9.1.4. Метод конформных отображений

В основе его лежит геометрический смысл производной функции комплексной переменной. Рассмотрим, например, функцию $\zeta = f(z)$, преобразующую переменную $z = x + iy$ в переменную $\zeta = \xi + i\eta$. Производная этой функции $d\zeta/dz = me^{i\omega}$, то есть $|d\zeta| = m|dz|$, $\arg d\zeta = \arg dz + \omega$. Следовательно, осуществляемое функцией f преобразование таково, что бесконечно малая фигура в окрестности точки z_1 (рис. 9.2) отображается в подобную бесконечно малую фигуру в окрестности эквивалентной точки ζ_1 ,

повернутую на угол ω (линейные размеры ее изменены в M раз, но углы между соответствующими отрезками сохранены). Такое преобразование (отображение) называют *конформным*.

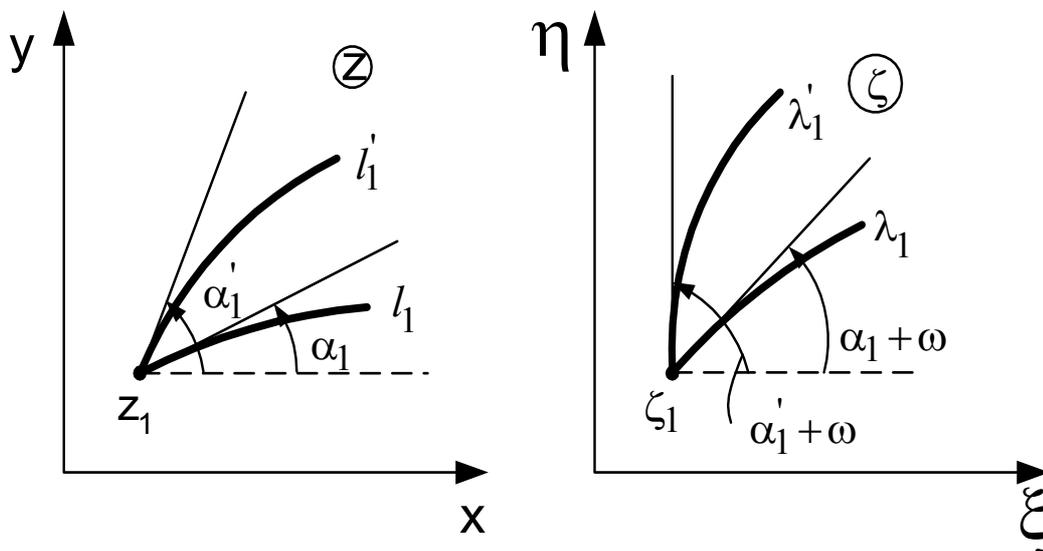


Рис. 9.2

Отмеченное свойство его весьма ценно для гидромеханики, поскольку «картина» плоского течения представлена совокупностью линий тока $\Psi = \text{const}$ и эквипотенциальных линий $\Phi = \text{const}$, являющейся ортогональной сеткой (последнее условие вытекает из тождества $\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi \equiv 0$). Так как при конформном отображении ортогональность сетки сохраняется, применение его к любой совокупности линий $\Phi = \text{const}$ и $\Psi = \text{const}$ вновь дает сетку таких линий для нового контура, полученного из исходного указанным отображением. Если найдена функция $\zeta = f(z)$, преобразующая контур, то получить выражение для комплексного потенциала нового течения нетрудно. Для этого достаточно подставить в исходный комплексный потенциал $\chi(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ функцию $z = g(\zeta)$, обратную к преобразующей: $\chi(z) = \chi[g(\zeta)] = \tilde{\chi}(\zeta)$. Выделяя из $\tilde{\chi}(\zeta)$ действительную и мнимую части, находят потенциал скорости $\tilde{\Phi}(\xi, \eta)$ и функцию тока $\tilde{\Psi}(\xi, \eta)$ нового течения.

Для единственности отображения контуров и их внешних областей преобразующую функцию надо выбирать так, чтобы бесконечно удаленные точки одной плоскости соответствовали таким же точкам другой, а направления скорости невозмущенного потока в обеих плоскостях совпадали. Если вокруг исследуемого тела существует циркуляция скорости, то обтекание исходного контура должно быть по-

строено с такой же циркуляцией. При анализе течения вокруг лопаточного профиля в качестве исходного контура берут окружность, поскольку ее обтекание легко найти методом суперпозиции.

9.2. Силовое взаимодействие потенциального потока жидкости с твердым телом

9.2.1. Обтекание кругового цилиндра

Его получают суперпозицией параллельного потока и течения «от диполя», под которым понимают предельную совокупность двух источников равных, но противоположных по знаку расходов \dot{V} , размещенных на расстоянии $2l$ и стремящихся друг к другу так, что $2l \rightarrow 0$; $\dot{V} \rightarrow \infty$; $2\dot{V}l = \text{const}$. Источники располагают по оси X , вдоль которой направлена скорость параллельного потока w_∞ , на расстоянии $-l$ и $+l$ от начала координат для источника $+\dot{V}$ и $-\dot{V}$ соответственно. Комплексный потенциал течения от диполя с моментом $M = 2\dot{V}l$ равен

$$\chi(z) = M/(2\pi z), \quad (9.12)$$

а для суммарного потока имеем

$$\chi(z) = w_\infty z + M/(2\pi z) = w_\infty (z + b^2/z). \quad (9.13)$$

Выделив действительную и мнимую части χ , получим выражения для потенциала скорости и функции тока:

$$\Phi = w_\infty x \left(1 + \frac{b^2}{x^2 + y^2}\right) = w_\infty \cos \vartheta \left(r + \frac{b^2}{r}\right);$$

$$\Psi = w_\infty y \left(1 - \frac{b^2}{x^2 + y^2}\right) = w_\infty \sin \vartheta \left(r - \frac{b^2}{r}\right).$$

Тогда уравнение линии тока

$$y \left[1 - \frac{b^2}{(x^2 + y^2)}\right] = \text{const}.$$

Нулевому значению константы отвечает линия, состоящая из участков оси абсцисс ($y = 0$) и окружности ($x^2 + y^2 = b^2$) с центром в начале координат. Задавая значения $\text{const} > 0$, получаем совокупность линий тока, показанную на рис. 9.3. Непроницаемость их позволяет рассматривать линию $x^2 + y^2 = b^2$ как контур поверхности кругового цилиндра, течение вокруг которого представлено осталь-

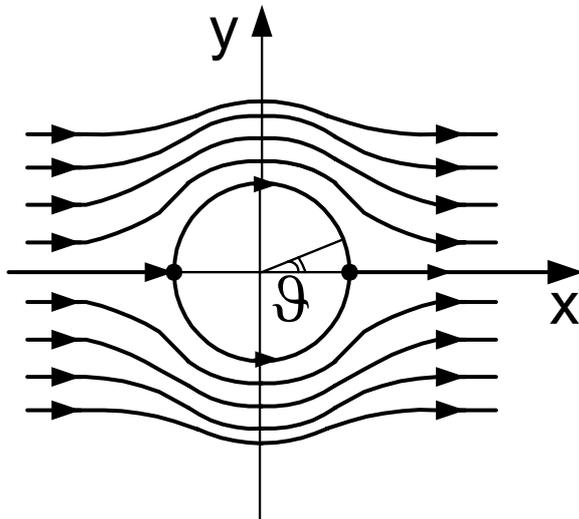


Рис. 9.3

ными линиями.

Следовательно, чтобы получить картину обтекания кругового цилиндра радиуса $r_{\text{ц}}$ параллельным на бесконечности потоком, имеющим скорость w_{∞} , необходимо ввести в этот поток диполь с моментом $M = 2\pi r_{\text{ц}}^2 w_{\infty}$.

Компоненты скорости суммарного течения определим с учетом соотношений

$w_r = \partial\Phi/\partial r$, $w_{\vartheta} = (\partial\Phi/\partial\vartheta)/r$. В итоге имеем:

$$w_r = w_{\infty} \cos \vartheta (1 - b^2/r^2);$$

$$w_{\vartheta} = -w_{\infty} \sin \vartheta (1 + b^2/r^2),$$

что для поверхности цилиндра ($r = r_{\text{ц}} = b$) дает $w_r = 0$, $w_{\vartheta} = w_{\text{ц}} = -2w_{\infty} \sin \vartheta$. Точки, в которых $w_{\vartheta} = 0$, называют *критическими*; их положение отвечает углам $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ (рис. 9.3).

Распределение *коэффициента давления* по цилиндру найдем, используя интеграл (9.3):

$$k_p = \frac{p_{\text{ц}} - p_{\infty}}{\rho w_{\infty}^2 / 2} = 1 - \frac{w_{\text{ц}}^2}{w_{\infty}^2} = 1 - 4 \sin^2 \vartheta. \quad (9.14)$$

Симметричное относительно направления течения и перпендикуляра к нему распределение k_p означает, что силовое взаимодействие между потоком и цилиндром здесь отсутствует.

Несоответствие полученного результата реальному обтеканию твердого тела жидкостью получило название *парадокса Даламбера*. Он есть следствие предположения о потенциальности движения, которое при реальном обтекании не выполняется в пристеночном слое. Из-за вязкости среды в нем образуются вихри, которые затем концентрируются в кормовой области и меняют здесь форму движения и распределение давления. В итоге возникает *сила сопротивления*, направленная против невозмущенного потока.

9.2.2. Теорема Жуковского о подъемной силе

Силовое взаимодействия с круговым цилиндром при потен-

циальном обтекании его можно достичь, нарушив симметрию потока. Так, уменьшение скорости обтекания в нижней части цилиндра и увеличение ее в верхней приведет, согласно уравнению (9.3), к перераспределению давления, вызывающему появление силы, которая направлена перпендикулярно вектору W_∞ снизу вверх (ее называют *подъемной*).

Получим указанное изменение скорости, наложив на исследованный выше поток течение от вихря с интенсивностью $-\Gamma$, расположенного в начале координат. Для такого *циркуляционного обтекания* цилиндра имеем:

$$\begin{aligned} \chi(z) &= w_\infty z + M/(2\pi z) - [\Gamma/(2\pi i)] \ln z = \\ &= w_\infty r e^{i\vartheta} + [M/(2\pi r^2)] r e^{-i\vartheta} + [\Gamma/(2\pi)] i \ln r e^{i\vartheta}; \quad (9.15) \\ \Phi(r, \vartheta) &= w_\infty \cos \vartheta (r + b^2/r) - [\Gamma/(2\pi)] \vartheta; \\ \Psi(r, \vartheta) &= w_\infty \sin \vartheta (r - b^2/r) + [\Gamma/(2\pi)] \ln r. \end{aligned}$$

Окружная компонента скорости на поверхности цилиндра

$$W_\vartheta|_{r=r_{\text{ц}}=b} = -[2w_\infty \sin \vartheta + \Gamma/(2\pi r_{\text{ц}})];$$

положение критических точек определится соотношением $\sin \vartheta|_{W_\vartheta=0} = -\Gamma/(4\pi r_{\text{ц}} w_\infty)$. Соответствующие случаям

$|\Gamma| < 4\pi r_{\text{ц}} w_\infty$, $|\Gamma| = 4\pi r_{\text{ц}} w_\infty$ и $|\Gamma| > 4\pi r_{\text{ц}} w_\infty$ картины обтекания показаны на рис. 9.4, а, б, в соответственно.

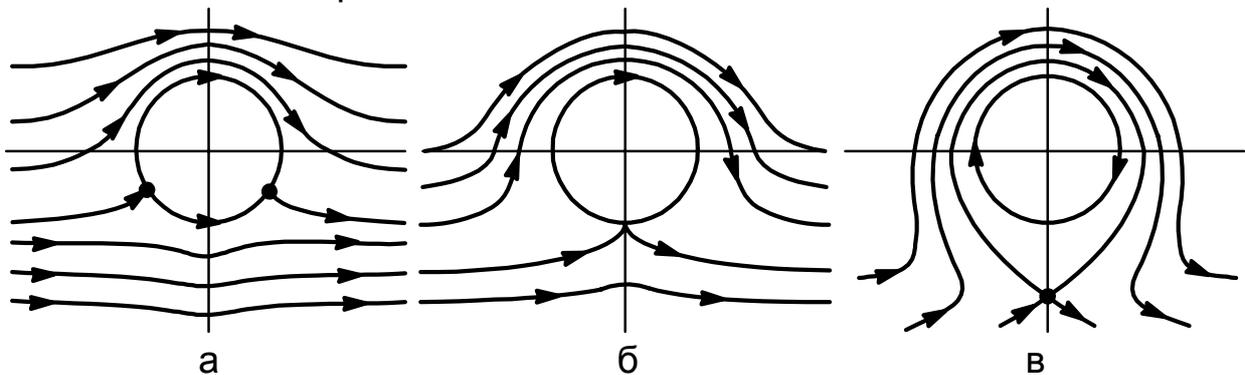
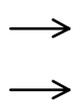


Рис.9.4

Как видно, течение возле цилиндра несимметрично «сверху-снизу» и симметрично «слева-справа». Следствием этого является наличие подъемной силы при отсутствии силы сопротивления.

Действительно, выйдем направленные по осям X и Y составляющие силы давления, действующей на цилиндр (рис. 9.5). Для элементарной площадки, соответствующей углу $d\vartheta$ и единичной длине цилиндра, они равны: $dX = -p_{\text{ц}} r_{\text{ц}} \cos \vartheta d\vartheta$ и



$dY = -p_{\text{ц}} r_{\text{ц}} \sin \vartheta d\vartheta$, где давление на поверхности цилиндра согласно (9.3) будет

$$p_{\text{ц}} = p_{\infty} + \rho w_{\infty}^2 / 2 - \rho [2w_{\infty} \sin \vartheta + \Gamma / (2\pi r_{\text{ц}})]^2 / 2.$$

Для всей поверхности цилиндра единичной длины имеем:

Рис. 9.5

$$\begin{aligned} X &= -r_{\text{ц}} \left(p_{\infty} + \frac{\rho w_{\infty}^2}{2} - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r_{\text{ц}}^2} \right) \int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta + \\ &+ \rho r_{\text{ц}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{w_{\infty} \Gamma \sin \vartheta}{\pi r_{\text{ц}}} + 2w_{\infty}^2 \sin^2 \vartheta \right) \cos \vartheta d\vartheta = 0; \\ Y &= -r_{\text{ц}} \left(p_{\infty} + \frac{\rho w_{\infty}^2}{2} - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r_{\text{ц}}^2} \right) \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta + \\ &+ \rho r_{\text{ц}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{w_{\infty} \Gamma \sin \vartheta}{\pi r_{\text{ц}}} + 2w_{\infty}^2 \sin^2 \vartheta \right) \sin \vartheta d\vartheta = \rho w_{\infty} \Gamma. \end{aligned}$$

Полученный результат есть частный случай *теоремы Жуковского о подъемной силе*: при стационарном обтекании плоским потенциальным потоком цилиндрического тела произвольного профиля с циркуляцией вокруг него на каждую единицу длины тела действует сила, модуль которой равен произведению плотности жидкости, модуля скорости потока в бесконечности и модуля циркуляции:

$$|\mathbf{R}| = \rho |w_{\infty}| |\Gamma|. \quad (9.16)$$

Направление силы определяют поворотом вектора скорости невозмущенного потока на 90° против направления циркуляции.

Эта теорема является основной для аэродинамики крыла, так как раскрывает причину возникновения подъемной силы – наличие циркуляции скорости вокруг профиля. В теории потенциального обтекания величину циркуляции берут равной интенсивности «присоединенного» вихря, который обеспечивает конечное значение скорости на задней кромке профиля (*постулат Жуковского—Чаплыгина*). При реальном обтекании профиля циркуляция равна суммарной интенсивности вихрей, возникающих в пограничном слое вследствие вязкости среды (она же вызывает силу сопротивления \vec{R}_{μ}).

9.2.3. Теорема Жуковского для решетки профилей

Жуковский показал, что при исследовании течения в лопаточных венцах турбомашин их можно заменять *решетками профилей*. Так называют совокупность идентичных профилей, расположенных на равных расстояниях друг от друга и одинаково ориентированных относительно некоторой линии – фронта решетки.

Вычислим силу, действующую на профиль в плоской решетке (рис.9.6) при потенциальном обтекании его жидкостью. Воспользуем-

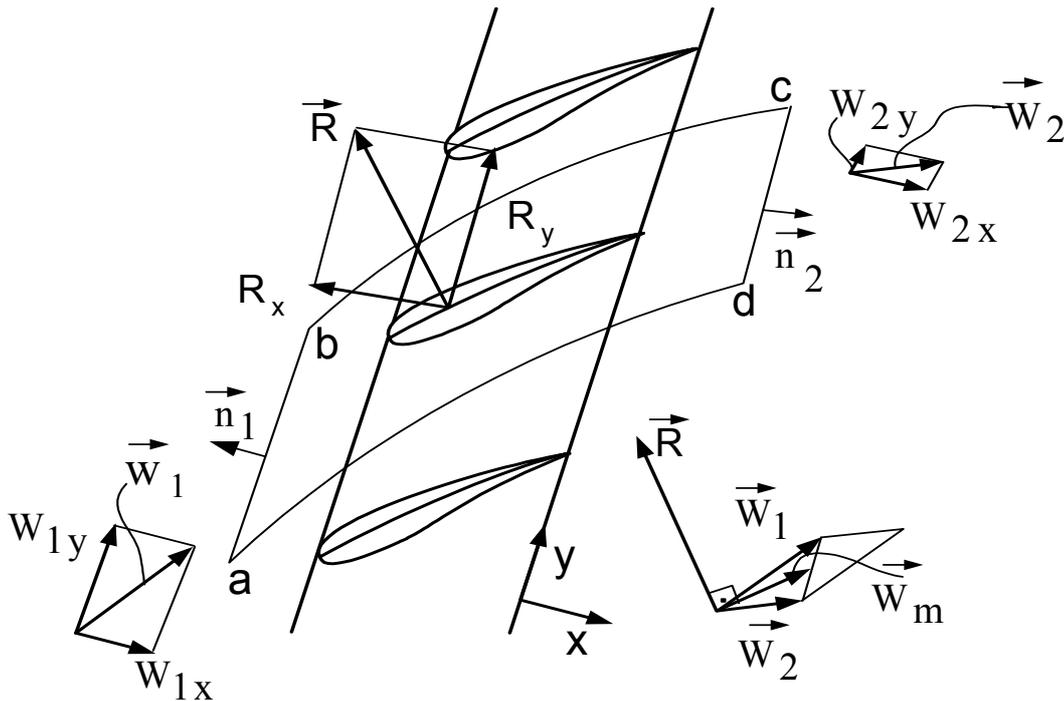


Рис. 9.6

ся интегральными уравнениями неразрывности, движения, энергии для слоя жидкости единичной толщины, заключенного между эквидистантными линиями тока bc и ad :

$$\rho w_{2x} t - \rho w_{1x} t = 0;$$

$$(\rho w_{2x}^2 + p_2) t - (\rho w_{1x}^2 + p_1) t = -R_x;$$

$$\rho w_{2x} w_{2y} t - \rho w_{1x} w_{1y} t = -R_y;$$

$$(\rho w_{2x} t w_{2x}^2 / 2 + p_2 w_{2x} t) - (\rho w_{1x} t w_{1x}^2 / 2 + p_1 w_{1x} t) = 0$$

(уравнение движения взято в проекциях на оси X и Y , ориентированные нормально к фронту решетки и вдоль него). Здесь t – шаг решетки; R_x и R_y – компоненты силы действия потока на профиль. Принято, что массовые силы малы, а распределение параметров на линиях ab и cd равномерно (они достаточно удалены от решетки).

Из первого уравнения следует $W_{2x} = W_{1x} = W_x$, поэтому система принимает вид

$$\begin{cases} (p_2 - p_1)t = -R_x; \\ \rho W_x t (w_{2y} - w_{1y}) = -R_y; \\ \left(p_2 / \rho + w_2^2 / 2 \right) - \left(p_1 / \rho + w_1^2 / 2 \right) = 0. \end{cases}$$

Согласно уравнению энергии $p_2 - p_1 = \rho(w_1^2 - w_2^2) / 2 = \rho(w_{1y}^2 - w_{2y}^2) / 2 = \rho(w_{1y} - w_{2y})(w_{1y} + w_{2y}) / 2 = \rho W_{my} (w_{1y} - w_{2y})$, где W_{my} – среднеарифметическое значение проекций скоростей W_1 и W_2 на ось y . Подставив полученное выражение $p_2 - p_1$ в соотношение для R_x и заметив, что W_x можно рассматривать как W_{mx} , имеем

$$\begin{cases} R_x = -\rho W_{my} t (w_{1y} - w_{2y}); \\ R_y = \rho W_{mx} t (w_{1y} - w_{2y}). \end{cases} \quad (9.17)$$

Разность $W_{1y} - W_{2y}$, являющаяся мерой отклонения потока в решетке, может быть выражена через циркуляцию скорости вокруг профиля. Действительно,

$$\Gamma_{abcd} = \oint_{abcd} \vec{w} \cdot d\vec{r} = w_{1y} t - w_{2y} t = (w_{1y} - w_{2y}) t \quad \text{ввиду экви-}$$

дистантности линий тока bc и ab). Поэтому окончательно имеем:

$$R_x = -\rho W_{my} \Gamma; \quad R_y = \rho W_{mx} \Gamma; \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \rho \Gamma \sqrt{W_{mx}^2 + W_{my}^2} = \rho W_m \Gamma, \quad \text{где } W_m \text{ – модуль геометрической}$$

полусуммы скоростей перед решеткой и за нею (см. рис. 9.6). Заме-

$$\begin{aligned} \text{тим, что вектор } \vec{R} \text{ перпендикулярен вектору } \vec{W}_m: \vec{R} \cdot \vec{W}_m = \\ = R_x W_{mx} + R_y W_{my} = -\rho W_{my} W_{mx} \Gamma + \rho W_{mx} W_{my} \Gamma = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, на профиль в решетке при потенциальном его обтекании действует сила, модуль которой равен произведению плотности жидкости, модуля векторной полусуммы скоростей потока пе-

ред и за решеткой и модуля циркуляции вокруг профиля:

$$|\mathbf{R}| = \rho |w_m| |\Gamma|. \quad (9.18)$$

Направление этой силы определяют поворотом вектора \vec{W}_m на 90° против направления циркуляции.

Формула (9.18) является математическим выражением *теоремы Жуковского о подъемной силе профиля в решетке*. При реальном обтекании к \vec{R} добавляется сила сопротивления \vec{R}_μ , вызванная вязкостью жидкости.

9.3. Система уравнений и граничные условия для потенциальных течений газа

9.3.1. Исходные соотношения

Здесь обычно рассматривают стационарные ($\partial/\partial t = 0$) плоские ($w_z = 0$, $\partial/\partial z = 0$) течения невязкого ($\mu = 0$) нетеплопроводного ($\lambda = 0$) газа в отсутствие массовых сил ($\vec{f} = 0$). При этом из-за потенциальности течения энтропия S неизменна в области, не содержащей ударных волн. Прохождение потока через ударную волну в общем случае нарушает его потенциальность. Однако, если интенсивность ударной волны по ее длине постоянна, течение остается потенциальным и за ударной волной. Поэтому в пределах расчетной области, границей которой является ударная волна неизменной интенсивности, также имеем $S = \text{const}$.

Изоэнтропность течения позволяет замкнуть уравнением $p/\rho^k = \text{const}$ систему уравнений неразрывности и движения, которая согласно (7.11) при сделанных допущениях имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + w_y \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho \frac{\partial w_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial w_y}{\partial y}; \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (9.19)$$

Граничными условиями здесь являются значения w_x, w_y, p, ρ в невозмущенном потоке, а также соотношение $w_n = 0$ на контуре твердого тела с внешней нормалью n .

Решение системы (9.19), дополненной уравнением $p/\rho^k = \text{const}$, позволяет найти скорость, давление и плотность газа. Значение температуры устанавливают по термическому уравнению состояния.

Систему (9.19) можно преобразовать, подставив в уравнение неразрывности выражения $w_x = \partial\Phi/\partial x$ и $w_y = \partial\Phi/\partial y$ и взяв вместо компонент уравнения движения интеграл Бернулли (7.18), учитывая соотношение $p/\rho^k = \text{const}$. В итоге получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{2k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const}. \end{array} \right. \quad (9.20)$$

Как видно, при течении газа уравнение потенциала скорости уже не является линейным. Поэтому прямое применение метода суперпозиции здесь невозможно. Ситуация не изменится, если вместо системы (9.19) записать уравнения для функции тока Ψ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0; \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{2k}{k-1} p \frac{\rho}{\rho_\infty^2} = \text{const.} \end{aligned} \right. \quad (9.21)$$

Они получены подстановкой выражений W_x и W_y через Ψ в условие потенциальности плоского течения (см. систему уравнений (9.2)) и в интеграл Бернулли. Поскольку функцию тока вводят по условию превращения в тождество уравнения неразрывности, для газа соотношения (9.5) заменяют выражениями

$$W_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\rho_\infty}{\rho}; \quad W_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\rho_\infty}{\rho}. \quad (9.22)$$

Нелинейность уравнений потенциала скорости или функции тока усложняет решение задач потенциального течения газа. Если возмущения, вносимые в поток обтекаемым телом, невелики, то продуктивна приближенная линеаризация этих уравнений.

9.3.2. Линеаризованное уравнение потенциала скорости

Выполним линеаризацию уравнения потенциала скорости из системы (9.20), предварительно приведя его к канонической форме. Принимая во внимание, что ввиду изозэнтропности течения производные $\partial \rho / \partial x$ и $\partial \rho / \partial y$ можно переписать как $(\partial \rho / \partial p)(\partial p / \partial x)$ и $(\partial \rho / \partial p)(\partial p / \partial y)$, где $\partial \rho / \partial p = 1/a^2$, подставим в них выражения $\partial p / \partial x$ и $\partial p / \partial y$ из компонент уравнения движения системы (9.19). В итоге уравнение потенциала скорости примет вид

$$\left(1 - \frac{W_x^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{W_x W_y}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{W_y^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (9.23)$$

Пусть \vec{W}_∞ – скорость невозмущенного параллельного потока, p_∞ и ρ_∞ – давление и плотность его, а \vec{W}' , p' , ρ' – значения *возмущений* этих параметров, внесенных в поток так, что $\vec{W} = \vec{W}_\infty + \vec{W}'$, $p = p_\infty + p'$, $\rho = \rho_\infty + \rho'$, причем $|W'|/W_\infty \ll 1$, $|p'|/p_\infty \ll 1$, $|\rho'|/\rho_\infty \ll 1$. Считая течение безвихревым и беря ось x по \vec{W}_∞ ,

напишем потенциал скорости общего движения:

$$\Phi(x, y) = w_{\infty}x + \varphi(x, y), \quad (9.24)$$

где $\varphi(x, y)$ – потенциал возмущения, вводимый как

$$w'_x = \partial\varphi / \partial x; \quad w'_y = \partial\varphi / \partial y. \quad (9.25)$$

При таких условиях оценка величины коэффициентов при производных в уравнении (9.23) дает:

$$1 - \frac{w_x^2}{a^2} = (1 - M_{\infty}^2) \left[1 + O\left(M_{\infty}^2 \frac{w'_x}{w_{\infty}} \right) / (1 - M_{\infty}^2) \right];$$

$$\frac{w_x w_y}{a^2} = M_{\infty}^2 \frac{w'_y}{w_{\infty}} + O\left(M_{\infty}^2 \frac{w'_x w'_y}{2w_{\infty}^2} \right);$$

$$1 - \frac{w_y^2}{a^2} = 1 + O\left(M_{\infty}^2 \frac{w_y'^2}{w_{\infty}^2} \right),$$

где символ $O(B)$ означает величину порядка B .

Принимая, что $\frac{M_{\infty}^2}{1 - M_{\infty}^2} \frac{w'_x}{w_{\infty}} \ll 1$; $M_{\infty}^2 \frac{w'_y}{w_{\infty}} \ll 1$ и сохраняя чле-

ны только первого порядка малости, с учетом (9.24) получим взамен (9.23) приближенное линейризованное уравнение для потенциала возмущения φ :

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.; \quad (9.26)$$

Вследствие сделанных допущений это уравнение теряет силу при наличии в потоке конечных возмущений ($w' \sim w_{\infty}$), а также в области околосвуковых ($M_{\infty} \approx 1$) и гиперзвуковых ($M_{\infty} \rightarrow \infty$) течений.

9.3.3. Система уравнений для линейризованных течений

Уравнение (9.26) является основным в теории линейризованных потоков. Его дополняют уравнением движения, которое здесь может быть взято практически таким же, как в одномерной модели. Действительно, если возмущения в потоке малы, площадь поперечного сечения трубок тока изменяется незначительно. Поэтому вполне коррект-

на запись: $\int_{p_\infty}^p dp = - \int_{w_\infty}^{w \approx w_\infty + w'_x} \rho w dw$ (интегрирование вдоль линий тока), или $p - p_\infty \approx -\rho_\infty w_\infty w'_x$. Следовательно, выражение для коэффициента давления имеет вид

$$k_p = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty w_\infty^2 / 2} = -2 \frac{w'_x}{w_\infty} = -\frac{2}{w_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (9.27)$$

Соотношения (9.26) и (9.27) рассматривают как систему уравнений линеаризованного течения газа. Решив уравнение (9.26), находят поле $\varphi(x, y)$, то есть величины w'_x, w'_y, \vec{w} . Зная w'_x , по выражению (9.27) определяют давление, а плотность вычисляют по уравнению изобары.

9.4. Линеаризованные модели потоков газа

9.4.1. Линеаризованное дозвуковое течение

При $M_\infty < 1$ уравнение потенциала возмущений (9.26) является уравнением эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (9.28)$$

где $n^2 \equiv 1 - M_\infty^2$.

Заменой переменных его можно превратить в уравнение Лапласа. Например, введем новые переменные $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\varphi}$:

$$\tilde{x} = b_x x; \quad \tilde{y} = b_y y; \quad \tilde{\varphi} = b_\varphi \varphi, \quad (9.29)$$

где b_x, b_y, b_φ – некоторые постоянные. Подставив полученные из этих выражений значения x, y, φ в (9.28) и приняв $b_x^2 = b_y^2 / n^2$, то есть $b_y / b_x = \sqrt{1 - M_\infty^2}$, получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}^2} = 0. \quad (9.30)$$

Физически это означает, что потоку газа с потенциалом возмущения $\varphi(x, y)$ поставлено в соответствие течение жидкости с потен-

циалом скорости $\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Найдя для этого течения поле $\tilde{\varphi}$, переносим его, согласно (9.29), на плоскость газа.

Из вида соотношений (9.29) и характера обтекания жидкостью твердых тел (см. подразд. 9.2) следует, что в дозвуковом линеаризованном потоке газа возмущения распространяются по всей области течения и затухают на бесконечности. При этом значения параметров в данной точке зависят от распределения их в потоке в целом.

Связь между коэффициентами b , взятую при замене выражения (9.28) уравнением Лапласа, надо дополнить их соотношением, которое определяется граничным условием на поверхности обтекаемого тела. Поскольку при потенциальном течении контур тела L должен совпадать с линией тока, по уравнению (6.10) имеем для газа

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_L = \frac{w_y}{w_x} = \frac{w'_y}{w_\infty + w'_x} \approx \frac{w'_y}{w_\infty} = \frac{1}{w_\infty} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_L,$$

или с учетом соотношений (9.29)

$$\left(\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\right)_{\tilde{L}} = \frac{1}{w_\infty} \frac{b_y^2}{b_x b_\varphi} \left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{y}}\right)_{\tilde{L}}.$$

Чтобы это выражение совпадало с граничными условиями на поверхности тела, обтекаемого жидкостью, надо принять $b_y^2 = b_x b_\varphi$, $w_\infty = \tilde{w}_\infty$.

Равенства $b_y/b_x = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ и $b_y^2 = b_x b_\varphi$ не определяют величин b , а устанавливают лишь их отношения. Поэтому одну из этих величин можно взять произвольно. Пусть $b_y = 1$, тогда $b_x = 1/\sqrt{1 - M_\infty^2}$, $b_\varphi = \sqrt{1 - M_\infty^2}$. Но независимо от выбора b_y форма тела, обтекаемого газом, и форма соответствующего тела в потоке жидкости связаны соотношением

$$\left(\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\right)_{\tilde{L}} : \left(\frac{dy}{dx}\right)_L = \frac{b_y}{b_x} = \sqrt{1 - M_\infty^2}.$$

Следовательно, наклон каждого элемента тела, которое необходимо разместить в жидкости, должен быть в $\sqrt{1 - M_\infty^2}$ раз меньше наклона соответствующего элемента тела, расположенного в газе. Это учитывают, назначая угол атаки, толщину тела и его выгиб.

При таком соответствии тел связь между коэффициентами давле-

ния в газе и жидкости, согласно (9.27), будет

$$k_p = -\frac{2}{w_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2}{\tilde{w}_\infty} \frac{b_x}{b_\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\tilde{k}_p}{1 - M_\infty^2}. \quad (9.31)$$

Если же в жидкости разместить тело, которое обтекает дозвуковой поток газа, то пересчет коэффициента давления ведут по *правилу Прандтля-Глауэрта*, согласно которому

$$k_p = \tilde{k}_p / \sqrt{1 - M_\infty^2}. \quad (9.32)$$

Значение k_p можно уточнить, подставляя в соотношения (9.31) или (9.32) местное число M . Если M выразить через M_∞ , то, например, формула (9.32) примет вид

$$k_p = \frac{\tilde{k}_p}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + 0,5\tilde{k}_p M_\infty^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right) / \sqrt{1 - M_\infty^2}}.$$

9.4.2. Линеаризованный сверхзвуковой поток

При $M_\infty > 1$ уравнение потенциала возмущений (9.26) становится уравнением *гиперболического типа*:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (9.33)$$

(здесь $m^2 \equiv M_\infty^2 - 1$). Его общим решением есть выражение

$$\varphi = \Omega_1(x - my) + \Omega_2(x + my), \quad (9.34)$$

где Ω_1 и Ω_2 – некоторые функции $x - my$ и $x + my$ соответственно, вид которых устанавливают по граничным условиям.

Рассматривая (9.34) как сумму частных решений $\varphi_1 = \Omega_1(x - my)$ и $\varphi_2 = \Omega_2(x + my)$, замечаем, что независимо от вида функций Ω_1 и Ω_2 значения потенциалов возмущений φ_1 и φ_2 остаются неизменными на линиях $y = x/m + \text{const}$ и $y = -x/m + \text{const}$ соответственно. Следовательно, на этих линиях сохраняются постоянными величины возмущений скорости и всех других параметров. Поэтому указанные прямые, представляющие собой первое (C_I) и второе (C_{II}) семейства *характеристик волно-*

вого уравнения (9.33), называют ещё *волнами возмущений*. Изменения в потоке могут происходить только на этих линиях, причем интенсивность изменений одна и та же по всей длине волны. Характеристики расположены к оси X (вектору \vec{W}_∞) под углом

$$\gamma = \pm \arctg(1/\sqrt{M_\infty^2 - 1}) \quad (9.35)$$

(знак «+» для семейства C_I , знак «-» для C_{II}).

Поскольку при $M_\infty > 1$ слабые возмущения не могут распространяться против направления потока, физически реализуются только волны первого семейства для течения в верхней полуплоскости и второго семейства – в нижней (на рис. 9.7 они показаны сплошными линиями). Волны генерируются *источниками возмущения* (например, точками излома поверхности тела) и уходят от них в бесконечность.

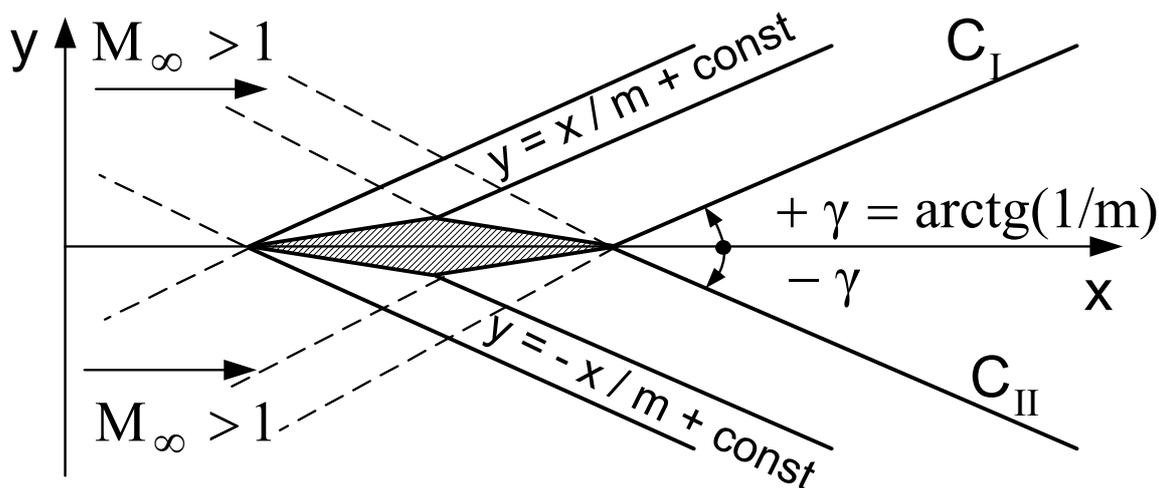


Рис. 9.7

Таким образом, существует принципиальное различие между дозвуковыми и сверхзвуковыми линеаризованными течениями в отношении распространения возмущений. Если в дозвуковом потоке возмущения заполняют всю область течения и затухают на бесконечности, то в сверхзвуковом они распространяются только по характеристикам в сторону направления течения без изменения своей интенсивности.

Важное место в теории линеаризованного сверхзвукового потока занимает задача о внешнем (рис. 9.8,а) и внутреннем (рис. 9.8,б) об-

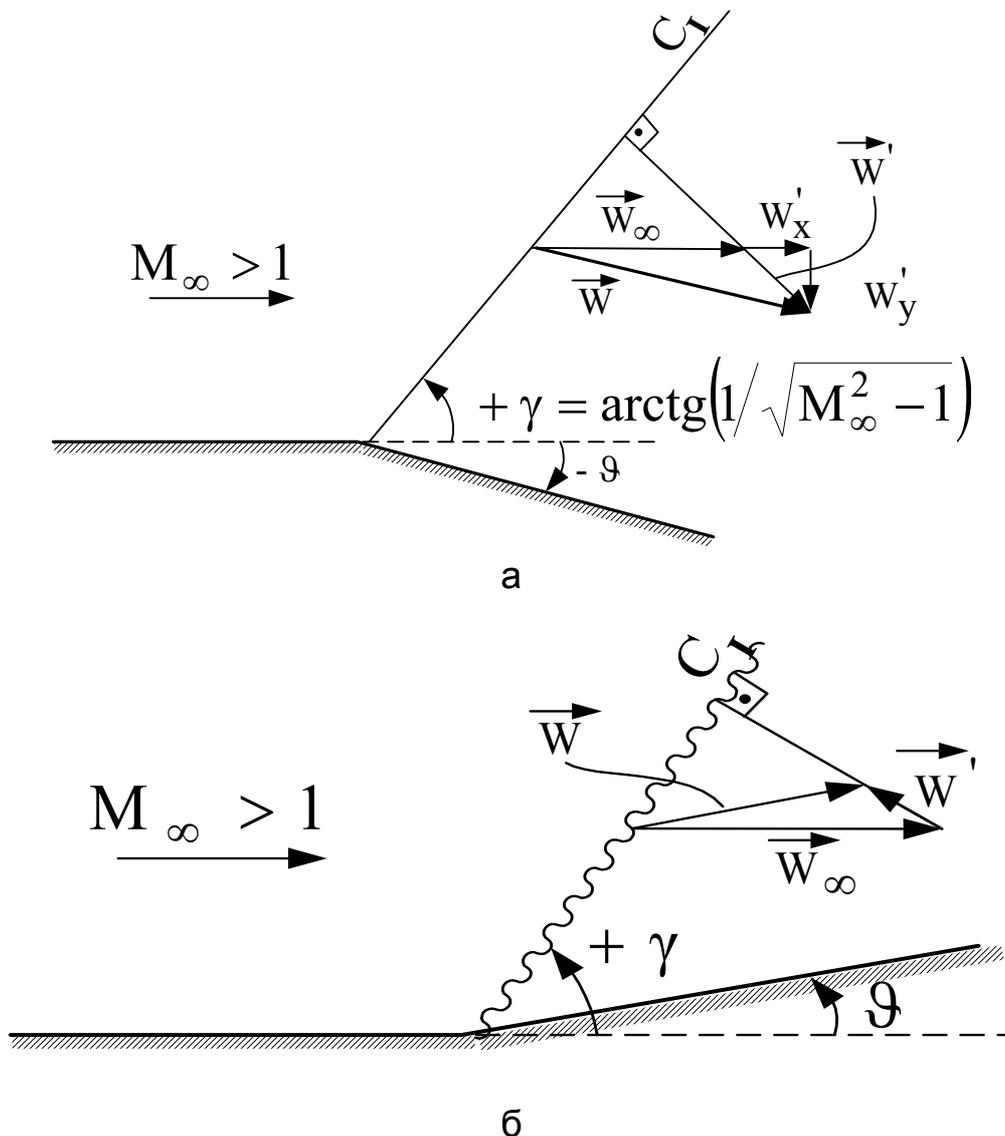


Рис. 9.8

течении тупого угла. Решение ее основано на отмеченном характере распространения возмущений: при однородном набегающем потоке $M_\infty > 1$ все линии тока за волной возмущения параллельны стенке за изломом. Поэтому уравнение линий тока

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w_y}{w_x} = \frac{w'_y}{w_\infty + w'_x} \approx \frac{w'_y}{w_\infty} = \frac{1}{w_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (9.36)$$

здесь должно совпадать с уравнением контура стенки $dy/dx = \mp \vartheta$ (оно записано с учетом того, что $|\vartheta| \ll \pi$; знак « - » берут для внешнего обтекания, знак « + » – для внутреннего при течении в верхней полуплоскости). Полученное на этом основании соотношение $\partial \varphi / \partial y = \mp w_\infty \vartheta$ сравниваем с решением $\varphi = \Omega_1(x - my)$, следующем из выражения (9.34) для верхней полуплоскости. В результате имеем

$$\varphi = \pm w_{\infty} (x - my) \vartheta / m \quad (9.37)$$

(внешнему обтеканию отвечает знак « + », внутреннему – знак « - »).

Согласно (9.27) коэффициент давления

$$k_p = -\frac{2}{w_{\infty}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mp 2 \frac{\vartheta}{m}, \quad (9.38)$$

так что при внешнем обтекании тупого угла линия возмущения является волной разрежения, при внутреннем – волной сжатия.

Для течения в нижней полуплоскости результат (9.38) остается в силе, а потенциал возмущения равен

$$\varphi = \pm w_{\infty} (x + my) \vartheta / m \quad (9.39)$$

(знак «+» соответствует внешнему обтеканию, знак «-» – внутреннему).

Соотношения для W'_x и W'_y , следующие из формул (9.37) или (9.39), выражают важное свойство линеаризованного сверхзвукового потока: здесь компоненты скорости возмущения определяются только местным углом между линиями тока возмущенного и невозмущенного потока. Из этого свойства вытекает местный характер всех параметров сверхзвукового потока, что принципиально отличает последний от потока дозвукового, где значения параметров в данной точке зависят от распределения их во всем потоке.

Деление W'_x на W'_y позволяет установить правило построения вектора скорости за характеристикой (см. рис. 9.8): совместив начало его с началом вектора скорости до характеристики, находим конец искомого вектора как точку пересечения перпендикуляра к характеристике, проходящего через конец исходного вектора, и линии, которая проведена через его начало параллельно стенке за изломом.

9.4.3. Отражение и пересечение линеаризованных волн

В сверхзвуковых потоках конечных размеров возможны отражение волн от границ области течения и пересечение волн.

Рассмотрим, например, поток в канале, одна из стенок которого имеет излом на угол $-\vartheta \ll \pi$ в точке А (рис. 9.9). Излом генерирует волну разрежения (характеристику первого семейства). Она отклоняет поток вниз на угол ϑ , поэтому в точке В падения волны на верхнюю стенку поток оторвется от нее. Условие безотрывности течения в окрестности точки В требует поворота потока вверх на тот же угол ϑ . В сверхзвуковом потоке отклонение возможно только на линии возмущения. Поэтому из точки В должна выйти волна той же интенсивности, но другого семейства. Ее можно рассматри-

вать как результат *отражения* упавшей в точку В волны.

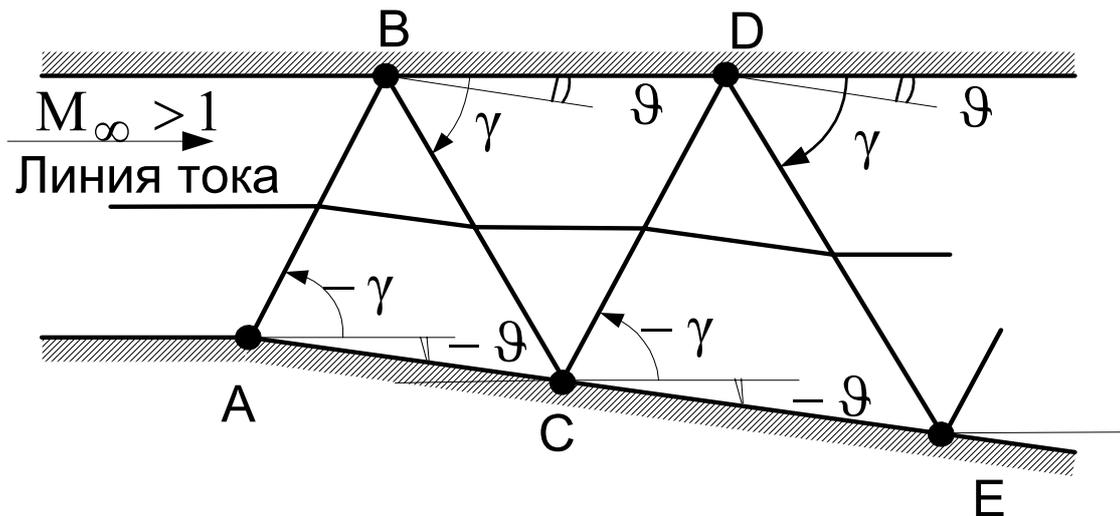


Рис. 9.9

Аналогичная ситуация складывается возле точек С, D и так далее, причем везде отклонение потока отвечает внешнему обтеканию (см. рис. 9.8,а). Поэтому все отраженные волны будут волнами разрежения.

Таким образом, при *отражении от твердой стенки* тип волны не меняется. Поскольку в линеаризованной теории все характеристики имеют угол наклона $\pm \gamma$ к вектору невозмущенной скорости, угол отражения волн здесь равен углу их падения (оба угла отсчитывают от направления \vec{W}_∞).

По этой же причине линеаризованные волны при *пересечении* не интерферируют независимо от их типа, причем пересекаться могут только характеристики разных семейств.

Рассмотрим теперь отражение волн от границы струи на примере нерасчетного истечения газа из плоского сопла Лаваля. Пусть сопло работает с давлением на срезе $p_c = p_{oc} + dp$, где p_{oc} – давление окружающей среды. Расширение газа вне сопла требует увеличения проходного сечения струи, поэтому границы ее отклоняются от оси сопла на угол $\theta \ll \pi$ (рис. 9.10,а). Отклонение газа от осевого направления и расширение его до p_{oc} (граница струи не «держит» давления) происходит в волне разрежения, исходящей из кромки А сопла. Последующий переход газа через исходную волну другого семейства приводит к перерасширению его до давления $p_{oc} - dp$. Зона такого давления не может отделяться от окружающей среды границей струи. Разграничение зон с давлениями $p_{oc} - dp$ и p_{oc} должна обеспечивать волна сжатия, исходящая из точки В. Ее можно

рассматривать как результат отражения от границы струи волны

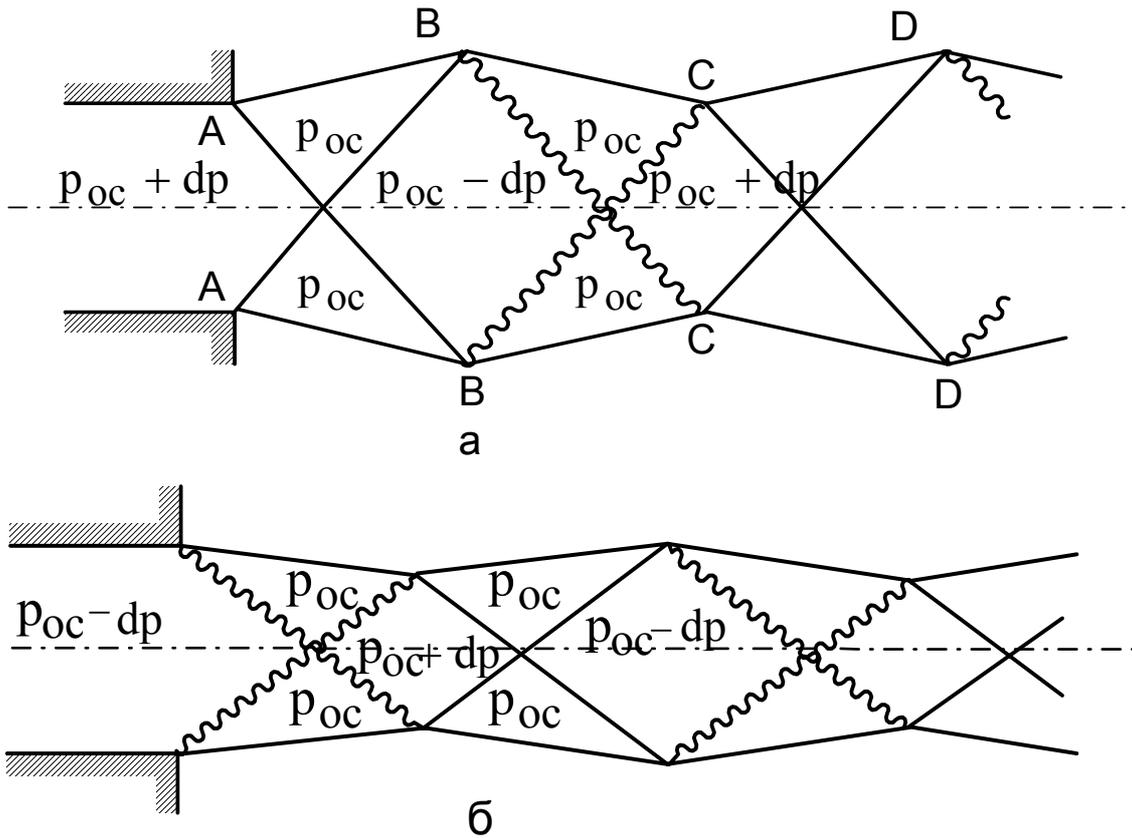


Рис. 9.10

разрежения, упавшей в точку В. Поворот потока волной сжатия вызовет отклонение границы струи к ее оси. Вторичное пересечение потоком волны сжатия создает зону с давлением $p_{0c} + dp$, так что в сечении СС повторяется ситуация, наблюдаемая на срезе сопла. Аналогично рассуждая, приходим к схеме течения в струе при работе сопла на режиме перерасширения (см. рис. 9.10,б). Понятно, что она повторяет схему на рис. 9.10,а, начиная с сечения ВВ.

Анализ приведенных схем позволяет заключить, что в случае отражения волн от границы струи тип их меняется на противоположный. В рамках линеаризованной теории угол отражения равен углу падения (при отсчете углов от направления оси струи).

Параметры линеаризованного сверхзвукового потока с отражением и пересечением волн можно существенно уточнить, если каждую характеристику проводить под углом

$$\gamma = \pm \arctg(1/\sqrt{M^2 - 1}) \quad (9.40)$$

к предшествующему ей вектору скорости с вычислением числа Маха по этой скорости. При такой локальной линеаризации наклон характеристик различен, поэтому характеристики одного семейства могут пересекаться. Пересечение волн одного или разных семейств здесь приведет к их интерференции, а отражение волн будет происходить под углом, отличным от угла падения. В случае неравномерного по-

тока перед характеристикой последняя будет представлена ломаной линией.

Описанный подход позволяет распространить представления линеаризованной теории на течения с конечными возмущениями. Рассматривая последние как сумму малых возмущений, каждое из которых вносится в поток, уже измененный предыдущими возмущениями, можно вполне корректно применить локальную линеаризацию для каждого из малых возмущений. Однако в общем случае этот метод приводит к весьма громоздким построениям.

9.5. Течения газа с конечными возмущениями

9.5.1. Конечные возмущения в дозвуковом потоке

При $M < 1$ нелинейные уравнения потенциала скорости и функции тока удается привести к линейным, используя, например, *преобразование Чаплыгина*.

Обычным образом введенные в физической плоскости X, Y величины Φ и Ψ , а также комплексную переменную Z представляют как функции скорости w и угла $\vartheta = \text{arctg}(w_y / w_x)$, что эквивалентно переходу на плоскость годографа скорости. Вначале отыскивают связи между производными Φ и Ψ по w и ϑ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = w \frac{\rho^0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial w}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w} = -\frac{1}{w} \frac{\rho^0}{\rho} \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \end{cases}$$

(здесь ρ^0 — полная плотность). Преобразуя их, получают *уравнения Чаплыгина* для функции тока и потенциала скорости:

$$\begin{cases} w^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial w^2} + \left(1 + \frac{w^2}{a^2}\right) w \frac{\partial \Psi}{\partial w} + \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} = 0; \\ \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right) w^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} + w \left(1 + \frac{w^4}{a^4}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} = 0. \end{cases}$$

Они уже линейны, ибо коэффициенты при производных здесь являются функциями только независимых переменных w и ϑ . После решения этих уравнений, то есть нахождения значений $\Phi(w, \vartheta)$ и $\Psi(w, \vartheta)$, совершают обратный переход на физическую плоско-

сть, используя соотношения

$$\begin{cases} dx = (1/w) \cos \vartheta d\Phi - (1/w)(\rho^0 / \rho) \sin \vartheta d\Psi; \\ dy = (1/w) \sin \vartheta d\Phi + (1/w)(\rho^0 / \rho) \cos \vartheta d\Psi. \end{cases} \quad (9.41)$$

Интегрируя их, получают зависимости $x = x(w, \vartheta)$; $y = y(w, \vartheta)$ и далее $w = w(x, y)$; $\vartheta = \vartheta(x, y)$; $\Phi = \Phi(x, y)$; $\Psi = \Psi(x, y)$.

Решение уравнений на плоскости годографа упрощается, если принять, что здесь среда несжимаема. Переход от газа к жидкости на этой плоскости осуществляют посредством функции Чаплыгина $\sqrt{\Psi}$, связывающей W и $W_{ж}$ следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{w}{w_{ж}} \frac{\rho^0}{\rho} \frac{dw_{ж}}{dw} = \sqrt{\Psi}; \\ -w w_{ж} \frac{d}{dw_{ж}} \left(\frac{1}{w} \frac{\rho^0}{\rho} \right) = \sqrt{\Psi}. \end{cases}$$

Эти связи позволяют получить соотношение коэффициента скорости Λ в газе и фиктивной величины $\Lambda_{ж} = w_{ж} / a^*$ в жидкости:

$$\frac{d\Lambda_{ж}}{\Lambda_{ж}} = \frac{d\Lambda}{\Lambda} \sqrt{\frac{1 - \Lambda^2}{1 - \Lambda^2 / \Lambda_{\max}^2}}.$$

В таком случае при переходе на плоскость X, Y выражения (9.41) интегрируют вдоль линии тока. Границы рассматриваемой области при пересчете меняются, и тем сильнее, чем больше Λ .

Найденная связь Λ и $\Lambda_{ж}$ позволяет определить коэффициенты давления k_p в газе, если известны аналогичные величины $k_{pж}$ в жидкости. Удобного аналитического выражения зависимости между k_p и $k_{pж}$ не получено, однако имеются таблицы и графики, позволяющие найти k_p по значениям $k_{pж}$, M_∞ , c_p / c_v . В большом диапазоне дозвуковых чисел Маха функция Чаплыгина мало отличается от единицы; здесь удается найти достаточно простую связь упомянутых коэффициентов.

При использовании метода Чаплыгина возникают трудности в удовлетворении граничных условий, однако их можно преодолеть с помощью приближенных методов решения на плоскости годографа.

9.5.2. Характеристики в сверхзвуковом потоке с конечными возмущениями

Учитывая особенности сверхзвукового течения, выявленные в ходе анализа линеаризованных потоков, при использовании нелинейных уравнений (9.20) или (9.21) также вводят понятие характеристик.

Здесь под *характеристиками на физической плоскости* понимают линии, в каждой точке которых касательная расположена под углом γ (см. формулу 9.40) к направлению вектора скорости. Дифференциальное уравнение этих линий

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{I,II} = \frac{w_x w_y \pm a\sqrt{w^2 - a^2}}{w_x^2 - a^2}, \quad (9.42)$$

где знаки «+» и «-» перед радикалом относятся к характеристикам первого (I) и второго (II) семейства соответственно.

Зависимость между w_x и w_y на таких характеристиках

$$\left(\frac{dw_y}{dw_x}\right)_{I,II} = -\frac{w_x w_y \pm a\sqrt{w^2 - a^2}}{w_y^2 - a^2} \quad (9.43)$$

рассматривают как отображение их на плоскость годографа скорости, называемое *характеристиками на плоскости годографа* (первого семейства со знаком «плюс» перед радикалом, второго со знаком «минус»). Можно показать, что нормаль к характеристике семейства I (II) в физической плоскости является касательной к характеристике семейства II (I) в плоскости годографа:

$$(dy/dx)_{I,II} (dw_y/dw_x)_{II,I} = -1.$$

Весьма важно, что уравнение (9.43) интегрируется в конечном виде для произвольного сверхзвукового течения. В полярных координатах Λ, ϑ его интеграл имеет вид

$$\pm \vartheta = \Lambda_{\max} \operatorname{arctg} K - \operatorname{arctg}(K \Lambda_{\max}) + \vartheta_0. \quad (9.44)$$

(10.64)

Здесь $K = \sqrt{(\Lambda^2 - 1)/(\Lambda_{\max}^2 - \Lambda^2)}$; Λ и Λ_{\max} – коэффициент скорости $\Lambda = w/a^*$ и его максимальное значение $\Lambda_{\max} = \sqrt{(k+1)/(k-1)}$; ϑ – угол между вектором скорости \vec{w} и направлением компоненты w_x (ϑ_0 – постоянная интегрирования).

Зависимость (9.44) представляет собой два семейства эпициклоид,

ограниченных окружностями радиусов $\Lambda = 1$ и $\Lambda = \Lambda_{\max}$. Эти семейства характеристик на плоскости годографа одинаковы для всех плоских сверхзвуковых течений газа с данным значением $k = c_p / c_v$.

Одинаковой для всех таких сверхзвуковых течений оказывается и связь коэффициентов $\Lambda_x = w_x / a^*$ и $\Lambda_y = w_y / a^*$, называемая уравнением эллипса Буземана:

$$[(k-1)/(k+1)]\Lambda_x^2 + \Lambda_y^2 = 1, \quad (9.45)$$

большая полуось которого длиной $\sqrt{(k+1)/(k-1)} a^*$ направлена по касательной к характеристике в физической плоскости. Это уравнение следует из формулы (8.35) и определения характеристики на физической плоскости.

Располагая сеткой характеристик на плоскости годографа, эллипсом Буземана и дополнительными таблицами, можно выполнить графическое построение картины сверхзвукового потока с указанием значений Λ (а, значит, и p) в точках пересечения характеристик разных семейств на физической плоскости. В общем случае такое построение весьма громоздко.

Однако для двух практически важных сверхзвуковых течений достаточно просто выполним аналитический расчет. Это относится к рассмотренным ниже внешнему и внутреннему обтеканию тупого угла полуограниченным потоком, когда условие $\vartheta \ll \pi$ снято.

9.5.3. Течение Прандтля–Майера

Решение задачи о повороте исходного равномерного сверхзвукового потока вокруг кромки O (рис. 9.11) на конечный угол ϑ_n сводится к определению величин Λ, p в любой его точке и нахождению уравнения линий тока.

Рассматривая упомянутый поворот как совокупность последовательных малых поворотов, приходим к выводу, что все изменения здесь будут происходить на прямых волнах возмущения, выходящих из кромки. Полный поворот на угол ϑ_n произойдет в секторе разрежения, ограниченном линиями $O1^*$ и O_n . Угол наклона первой характеристики $(O1)$ к вектору скорости невозмущенного потока \vec{W}_1 составляет $\gamma_1 = \arctg(1/\sqrt{M_1^2 - 1})$. Последняя линия (тока)

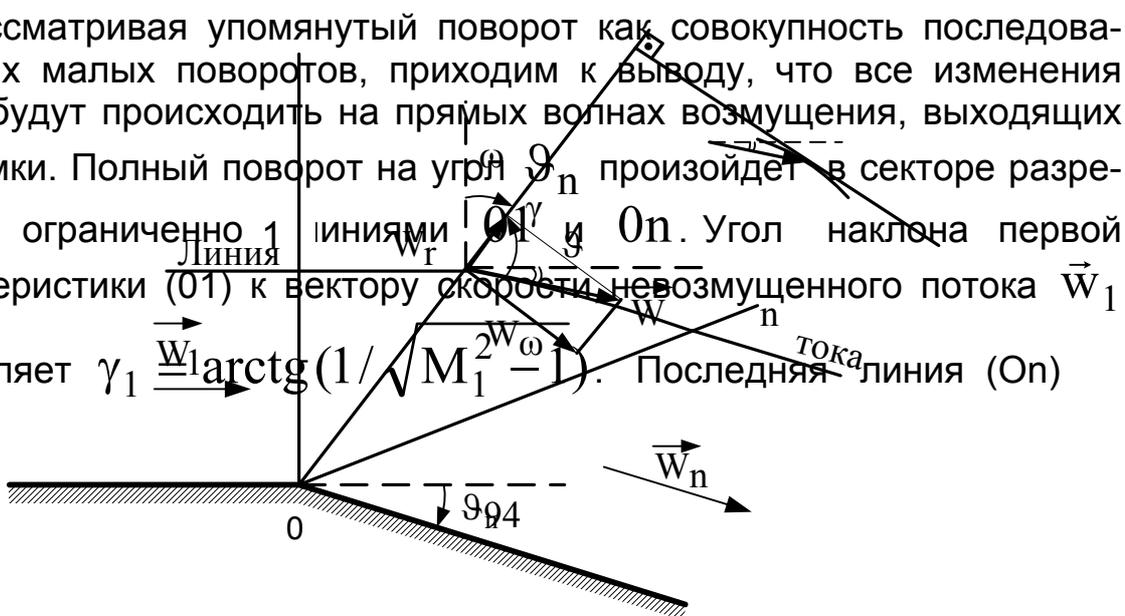


Рис. 9.11

наклонена под углом $\gamma_n = \arctg(1/\sqrt{M_n^2 - 1})$ к вектору \vec{W}_n , параллельному новому направлению стенки.

Примем, что исходный поток является звуковым (такому случаю и отвечает первая характеристика 01 на рис. 9.11). Тогда с учетом направления невозмущенного потока вместо уравнения (9.44) имеем

$$\vartheta = \Lambda_{\max} \arctg K - \arctg(K\Lambda_{\max}) \quad (9.46)$$

(угол взят положительным при отсчете по часовой стрелке).

По определению характеристики на физической плоскости, угол наклона любой волны в секторе разрежения к «своему» вектору скорости равен

$$\gamma = \arctg(1/\sqrt{M^2 - 1}) = \arctg(1/(K\Lambda_{\max})) \quad (9.47)$$

(с учетом формулы (8.38)). В то же время, согласно рис. 9.11, угол между волной и линией 01 равен

$$\omega = \pi/2 + \vartheta - \gamma = \pi/2 + \Lambda_{\max} \arctg K - \arctg(K\Lambda_{\max}) - \arctg(1/(K\Lambda_{\max})),$$

или (сумма последних двух арктангенсов равна $\pi/2$)

$$\omega = \Lambda_{\max} \arctg K. \quad (9.48)$$

Совокупность формул (9.46) – (9.48) представляет собой параметрическое (по Λ) решение задачи о течении Прандтля-Майера. Задавая коэффициент скорости Λ в пределах от 1 до Λ_n (его значение находим из формулы (9.46) при $\vartheta = \vartheta_n$), определяем по соотношению (9.48) положение волны разрежения, отвечающей заданному Λ , и далее с помощью зависимости (9.47) ищем направление вектора скорости. Давление p вычисляем по газодинамической функции $\pi(\Lambda)$.

Величина Λ не может превышать Λ_{\max} , поэтому существует предельный угол поворота сверхзвукового потока ϑ_{\max} . Его значение следует из формулы (9.46) при $\Lambda = \Lambda_{\max}$:

$$\vartheta_{\max} = (\Lambda_{\max} - 1)\pi/2.$$

Такой угол отвечает расширению газа до $p = 0$. При этом $\omega = \Lambda_{\max} \pi/2$, $\gamma = 0$ (крайняя характеристика 0n совпадает с линией тока).

Найдем семейство линий тока в секторе разрежения. В полярных

координатах (r, ω) уравнение (6.10) принимает вид $(dr/d\omega)/r = w_r/w_\omega$, что в рассматриваемом случае дает $(dr/d\omega)/r = \text{ctg}\gamma$, откуда с учетом формул (9.47) и (9.48) имеем $(dr/d\omega)/r = \Lambda_{\max} \text{tg}(\omega/\Lambda_{\max})$. Интегрируя, получаем уравнение семейства линий тока:

$$r = r_0 [\cos(\omega/\Lambda_{\max})]^{-\Lambda_{\max}^2}, \quad (9.49)$$

где r_0 – значение r у рассматриваемой линии тока при $\omega = 0$.

Изложенное решение пригодно и в случае, когда исходный поток сверхзвуковой. Формула (9.47) при этом сохраняется, а выражения (9.46) и (9.48) надо переписать так:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \Lambda_{\max} [\text{arctg}K - \text{arctg}(K_1\Lambda_{\max})] - \\ &\quad - \text{arctg}(K\Lambda_{\max}) + \text{arctg}(K_1\Lambda_{\max}); \\ \omega &= \Lambda_{\max} [\text{arctg}K - \text{arctg}(K_1\Lambda_{\max})]. \end{aligned}$$

Здесь K_1 – значение K при $\Lambda = \Lambda_1$; угол ϑ отсчитывают от направления вектора скорости \vec{W}_1 исходного потока, а угол ω – от соответствующей ему начальной характеристики 01 , которая наклонена к \vec{W}_1 под углом $\gamma_1 = \text{arctg}(1/\sqrt{M_1^2 - 1})$.

9.5.4. Косые скачки уплотнения

«Внутреннее» обтекание стенки с изломом на угол $\vartheta \ll \pi$ при $M_\infty > 1$ сопровождается образованием слабой волны сжатия (см. рис. 9.8,б). Излом на конечный угол ϑ дает в этих условиях ударную волну (см. подразд. 8.4.1), или *косой скачок уплотнения* (угол наклона волны к вектору скорости до нее $\alpha < \pi/2$).

Изменение параметров на скачке свяжем с исходным значением Λ , записав выражения законов сохранения массы, импульса, энергии для объема газа, содержащего скачок (рис. 9.12). Учтем введенные в подразд. 9.3.1 допущения и рассмотрим слой газа единичной толщины.

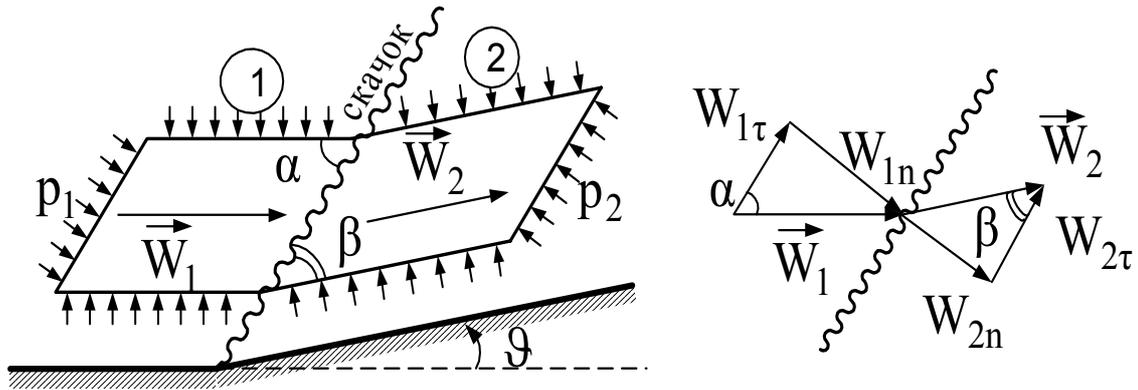


Рис. 9.12

Массу через плоскость скачка переносит только нормальная к ней компонента скорости, поэтому

$$\rho_2 W_{2n} = \rho_1 W_{1n}. \quad (9.50)$$

Векторное уравнение закона сохранения импульса проектируем на плоскость скачка и перпендикулярное к ней направление:

$$\rho_2 W_{2n} W_{2\tau} = \rho_1 W_{1n} W_{1\tau}, \quad (9.51)$$

$$p_2 + \rho_2 W_{2n}^2 = p_1 + \rho_1 W_{1n}^2. \quad (9.52)$$

Уравнение энергии здесь имеет обычный вид:

$$c_p T_2 + w_2^2 / 2 = c_p T_1 + w_1^2 / 2. \quad (9.53)$$

Из формул (9.50) и (9.51) следует, что тангенциальная компонента скорости при переходе газа через косой скачок не меняется. С учетом этого перепишем уравнение (9.53) так:

$$c_p T_2 + w_{2n}^2 / 2 = c_p T_1 + w_{1n}^2 / 2. \quad (9.54)$$

Система равенств (9.50), (9.52), (9.54) образует условия динамической совместности для косого скачка.

Сравнивая их с аналогичными соотношениями (8.60) для прямого скачка, видим, что они отличаются только индексом «n» у скоростей W_1 и W_2 . Следовательно, косой скачок уплотнения можно рассматривать как прямой для нормальной компоненты скорости, сносимый вдоль фронта со скоростью W_τ . Иначе говоря, изменение всех параметров в косом скачке связано со скачкообразным уменьшением нормальной компоненты скорости.

В соответствии с этим расчет косого скачка уплотнения можно вести по рабочим формулам (8.61) – (8.65) прямого скачка, записанным для нормальной компоненты скорости.

Вычисляя соответствующий коэффициент скорости Λ_n , компоненту W_n надо относить к фиктивной критической скорости

$$a_{\phi}^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_{\phi}^0}. \quad (9.55)$$

Здесь T_{ϕ}^0 – фиктивная полная температура, или *температура частичного торможения* (ее примет газ при энергетически изолированном погашении только нормальной компоненты скорости). По определению полной температуры (8.31) имеем

$$T_{\phi}^0 = T + \frac{k-1}{kR} \frac{w_n^2}{2}, \quad (9.56)$$

или

$$T_{\phi}^0 = T^0 - \frac{k-1}{kR} \frac{w_{\tau}^2}{2}. \quad (9.57)$$

Подставив формулу (9.57) в соотношение (9.55), получим

$$a_{\phi}^* = \sqrt{a^{*2} - \frac{k-1}{k+1} w_{\tau}^2}. \quad (9.58)$$

При этом выражение для квадрата коэффициента скорости Λ_{1n} , который войдет во все рабочие формулы, будет таким:

$$\Lambda_{1n}^2 = \frac{w_{1n}^2}{a_{\phi}^{*2}} = \frac{w_1^2 \sin^2 \alpha}{a^{*2} - \frac{k-1}{k+1} w_{\tau}^2} = \frac{\Lambda_1^2 \sin^2 \alpha}{1 - \frac{k-1}{k+1} \Lambda_1^2 \cos^2 \alpha}. \quad (9.59)$$

Введение его вместо Λ_1^2 в формулы (8.62) – (8.64) позволяет найти по ним плотность, температуру и давление газа за косым скачком при известном их значении до скачка. Связь между w_2 и w_1 легко получить, используя условие $w_{2\tau} = w_{1\tau}$:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \vartheta)}. \quad (9.60)$$

Величины T^0 и T_{ϕ}^0 при переходе через косой скачок сохраняют свои значения, что следует из уравнений (9.53) и (9.54). Изменение полного давления определяют по формуле (8.65), подставив в нее Λ_{1n}^2 вместо Λ_1^2 , поскольку получаемое при этом отношение фиктивных давлений $p_{2\phi}^0 / p_{1\phi}^0$, достигаемых погашением нормальной

компоненты скорости, оказывается равным p_2^0 / p_1^0 .

Согласно формуле (9.59), для вычисления величины Λ_{1n} , определяющей изменение параметров на косом скачке, надо знать угол α наклона скачка к вектору невозмущенной скорости \vec{w}_1 . Его выражают через угол отклонения поверхности ϑ (см. рис. 9.12) и угол между скачком и вектором скорости за скачком β :

$$\alpha = \vartheta + \beta, \quad (9.61)$$

поскольку последний можно связать с искомым углом α соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta = w_{1n} / w_{2n} = \Lambda_{1n}^2, \quad (9.62)$$

следующим из равенств $\operatorname{tg} \alpha = w_{1n} / w_{1\tau}$ и $\operatorname{tg} \beta = w_{2n} / w_{2\tau}$. Формулы (9.59), (9.61), (9.62) образуют замкнутую систему уравнений, решение которой дает зависимость α от ϑ и Λ_1 . Если определять Λ_{1n} по формуле

$$\Lambda_{1n}^2 = \frac{k+1}{2} \cdot \frac{M_1^2 \sin^2 \alpha}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2 \alpha}, \quad (9.63)$$

полученной заменой в соотношении (8.39) M_1 на величину $M_{1n} = M_1 \sin \alpha$, то будет найдена зависимость α , ϑ и M_1 . Последняя представлена графически на рис. 9.13 для $k = 1,4$.

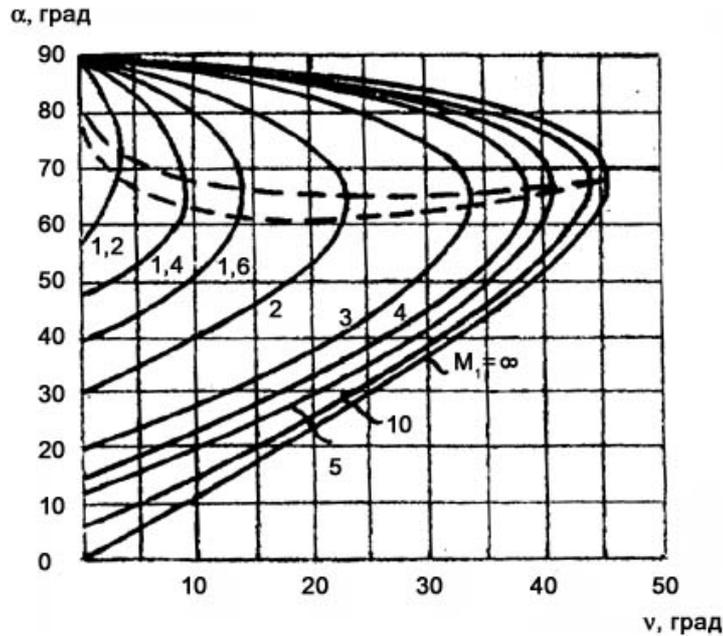


Рис. 9.13

Как видно, для любого числа M_1 существует предельное значение угла отклонения обтекаемой поверхности ϑ_{\max} , еще отвечающее системе уравнений (9.61) – (9.63).

При $\vartheta < \vartheta_{\max}$ ей удовлетворяют два значения угла наклона скачка α к вектору невозмущенной скорости. Большее из них соответствует «*сильным*» скачкам, меньшее – «*слабым*» (при данном M_1 скачок тем интенсивнее, чем больше угол между вектором \vec{W}_1 и фронтом скачка).

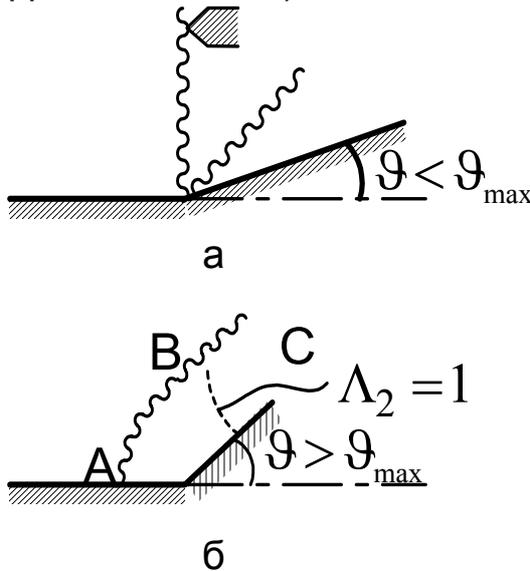


Рис. 9.14

Расчеты показывают, что за сильным скачком скорость потока становится дозвуковой. За слабым она остается сверхзвуковой, кроме небольшой области, выделенной на рис. 9.13 штриховыми линиями. Верхняя из них соединяет точки перегиба кривых $\alpha = \alpha(\vartheta)$; она разделяет зоны сильных и слабых скачков. Нижняя линия соответствует значениям углов α , при которых скорость за скачком является звуковой. По мере уменьшения угла отклонения обтекаемой поверхности угол наклона сильного скачка возрастает, слабого – уменьшается. В пределе сильный косой скачок становится прямым, а слабый вырождается в волну уплотнения, угол наклона которой определяют по формуле (9.35).

Опыт показывает, что обычно реализуются слабые косые скачки.

Сильные скачки возникают лишь в особых условиях, например, если для них есть «точки опоры» (твердое тело на рис. 9.14,а). Оба скачка «выходят» из точки излома обтекаемой поверхности; такие скачки называют *присоединенными*.

При угле отклонения поверхности $\vartheta > \vartheta_{\max}$ поворот сверхзвукового потока в присоединенном косом скачке невозможен. В этом случае возникает криволинейная *отошедшая ударная волна* (рис. 9.14,б), на участках которой реализуются все углы α для данного M_1 : от $\alpha = 90^\circ$ у поверхности до угла наклона слабой волны вдали от нее. За ударной волной наблюдаются области как дозвукового течения (за участком АВ на рис.9.14,б), так и сверхзвукового (за участком ВС).

Присоединенный косой скачок не нарушает потенциальность течения, но за криволинейной ударной волной поток теряет потенциальность. Вследствие переменности α вдоль такой волны ее интенсивность на разных участках различна. Следовательно, на них по-разному падает полное давление, поэтому поле энтропии за волной становится неоднородным (см. формулу (8.30)).

9.5.5. Отражение и пересечение косых скачков

Встреча скачка со стенкой приводит к его отражению, вид которого определяется соотношением величин M_1 и ϑ (рис. 9.15).

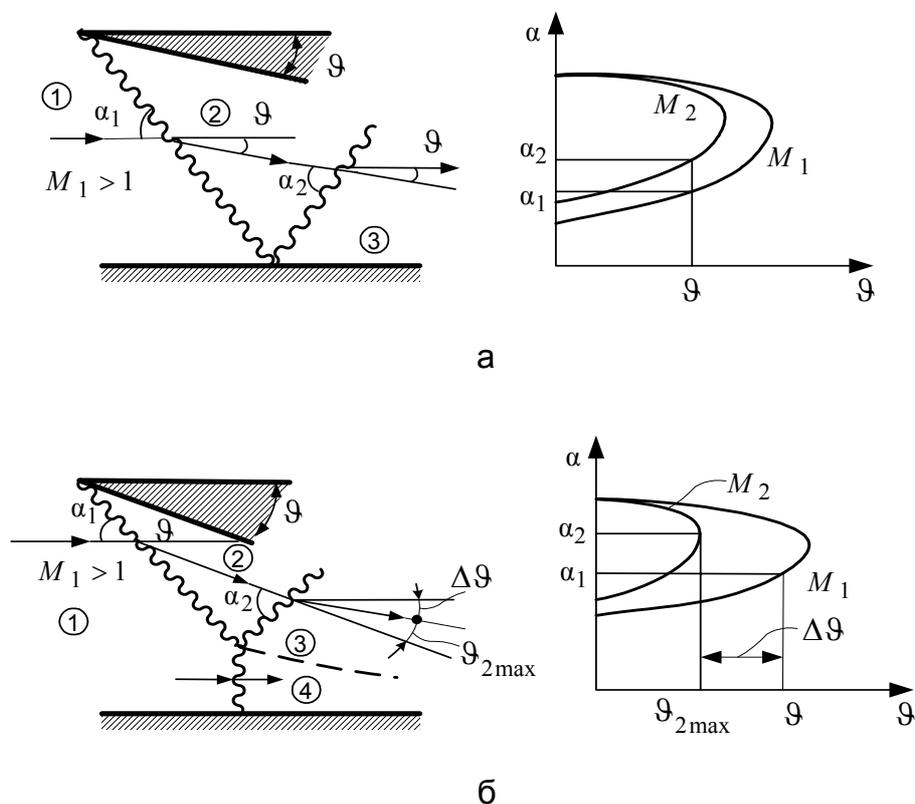


Рис. 9.15

Если при заданных их значениях скорость на «падающем» косом

скачке уменьшается так, что кривая M_2 на графике $\alpha = \alpha(\vartheta)$ пересекается с линией ϑ , то в точке встречи скачка со стенкой возникает косоугольный скачок (рис. 9.15,а), интенсивность которого достаточна для поворота потока на угол ϑ , то есть для обеспечения безотрывного течения у стенки. При этом говорят, что произошло *регулярное отражение* косоугольного скачка.

В случае, когда сочетание величин M_1 и ϑ дает за исходным скачком скорость такую, что кривая M_2 не пересекает линию ϑ , максимальный угол поворота потока с числом Маха M_2 в прямолинейном косоугольном скачке составляет $\vartheta_{2\max} < \vartheta$. Поток за таким скачком не будет параллельным стенке (рис. 9.15,б). Для обеспечения этой параллельности возле стенки необходим прямой скачок, к которому и примыкает упомянутый косоугольный скачок, поворачивающий поток с M_2 на угол $\vartheta_{2\max}$. Описанная система образует *маховское отражение* исходного косоугольного скачка. Поток за отраженным «ломаным» скачком получается неоднородным: величина и направление скорости в зонах 3 и 4 различны, так что они отделены друг от друга тангенциальным разрывом скорости (показан штриховой линией). При маховском отражении имеем $p_3 = p_4$, а $p_3^* > p_4^*$.

Задачу об *отражении косоугольного скачка от границы струи* решают исходя из того, что граница не удерживает разность давлений. Поэтому из точки падения скачка на границу струи (рис. 9.16) должна

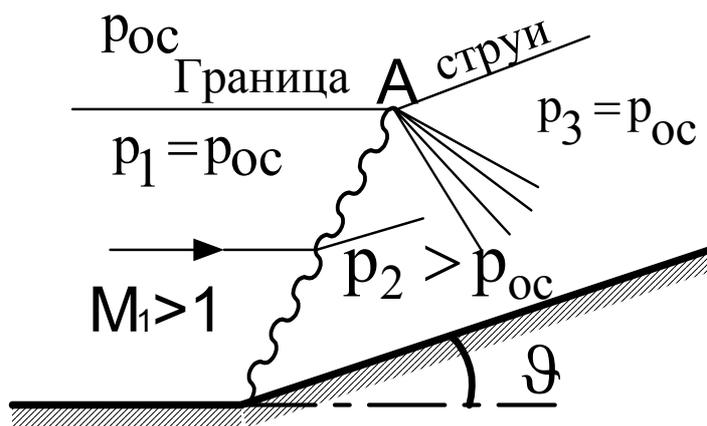


Рис. 9.16

выйти система центрированных волн разрежения, в которой давление за скачком $p_2 > p_{0c}$ снизилось бы до давления окружающей среды p_{0c} . Граница струи в точке А отклоняется от своего начального направления на угол, равный сумме углов отклонения потока в косоугольном скачке и в системе волн разрежения.

Пересечение косоугольного скачка с волной разрежения (системой соответствующих характеристик) приводит к постепенному ослаблению скачка: на каждой из этих характеристик давление уменьшается, и рост давления при переходе через участок скачка за характеристикой должен быть снижен. По этой причине скачок теряет прямолиней-

ность в зоне пересечения. Повышение давления на участке скачка за зоной пересечения его с волной разрежения определяют из условия неизменности давления во всей области 3 (рис. 9.17). Поле p^0 здесь оказывается неоднородным.

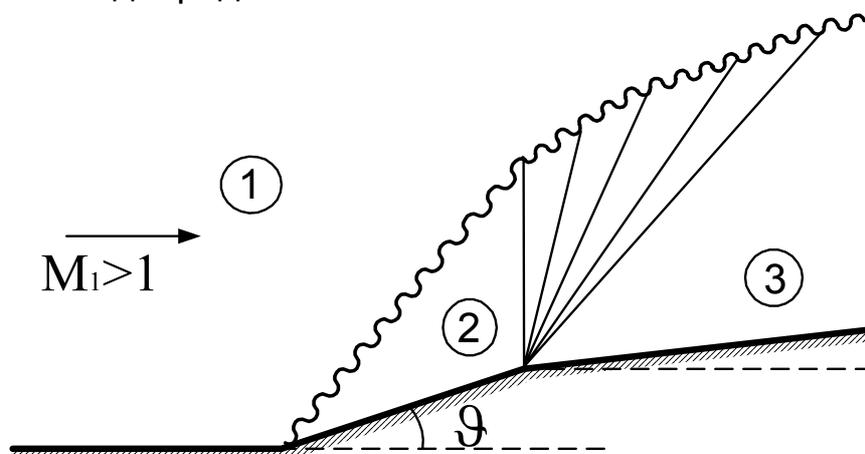


Рис. 9.17

При пересечении косых скачков одного семейства (поворачивающих поток в одну и ту же сторону) в точке пересечения В возникает один более мощный скачок (рис. 9.18). Он поворачивает исходный поток на угол, равный сумме углов поворота в пересекающихся скачках. Давление за этим скачком в большинстве случаев равно давлению за системой пересекающихся скачков ($p_5 = p_3$). Полное давление после системы всегда больше, чем в области за одним

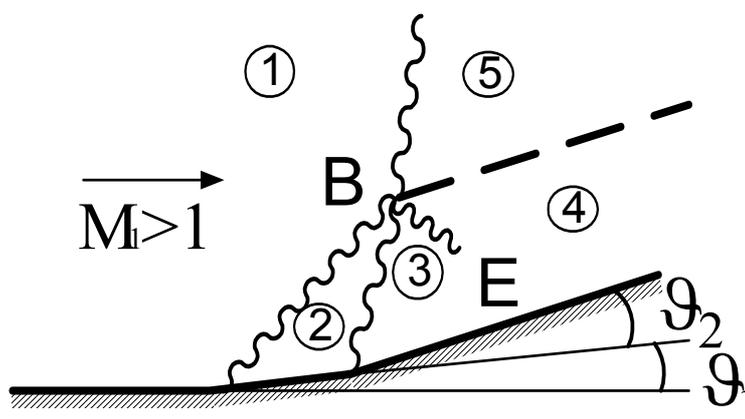


Рис. 9.18

суммарным скачком ($p_3^0 > p_5^0$). При $p_3 = p_5$ это означает, что поток в области 3 течет с большей скоростью, чем в области 5, вследствие чего между ними располагается тангенциальный разрыв скорости (показан штриховой линией). Некоторые сочетания величин θ_1 , θ_2 , M_1 могут привести к случаю $p_3 \neq p_5$; тогда из точки В выходит «отраженная» волна сжатия или разрежения ВЕ, выравнивающая давление в зонах 5 и 4.

На рис. 9.19 показаны варианты пересечения косых скачков разных семейств (они поворачивают поток в разные стороны), отвечающие скачкам одинаковой интенсивности. Как видно, здесь наблюдается аналогия с отражением косого скачка от стенки. Случаи ре-

гулярного (рис. 9.19,а) и маховского (рис. 9.19,б) пересечений соответствуют аналогичным ситуациям по соотношению величин M_1 и ϑ . При разной интенсивности пересекающихся скачков возникает более сложная несимметричная картина.

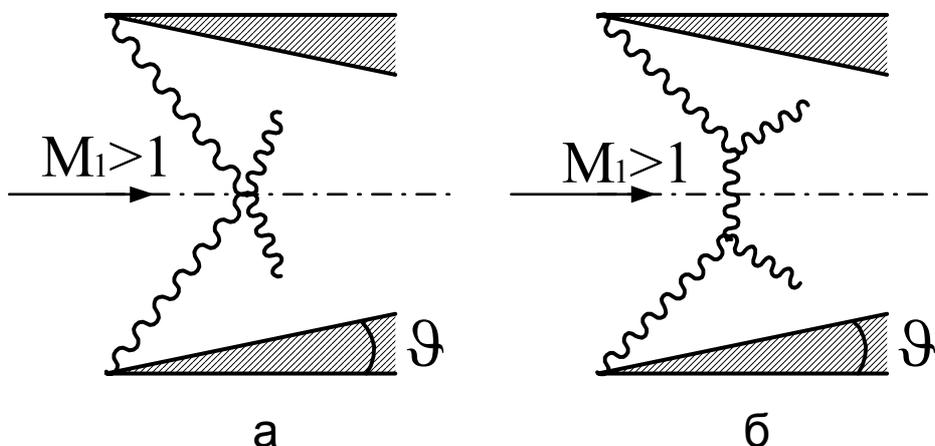


Рис. 9.19

Рассмотренные случаи позволяют схематизировать *структуру сверхзвуковой струи*, истекающей из плоского сопла Лавала при большой степени нерасчетности.

В случае *недорасширения* (давление на срезе сопла p_c больше противодавления p_{II}) газ расширяется вне пределов сопла в системе характеристик, исходящих из кромок сопла (рис. 9.20).

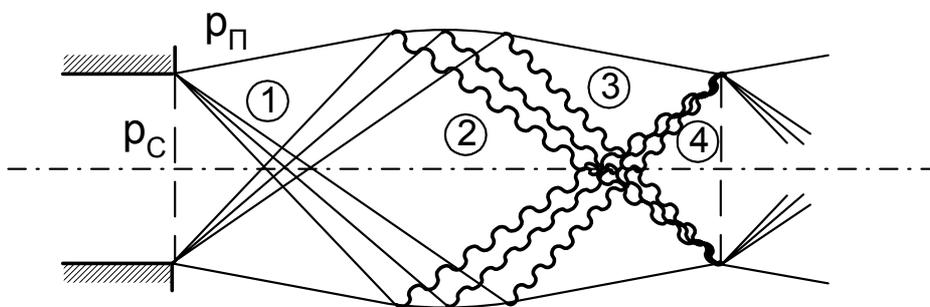


Рис. 9.20

Отклонение потока от осевого направления системой волн можно рассчитать по формулам для течения Прандтля-Майера исходя из того, что давление в зоне 1 должно быть равным противодавлению p_{II} (граница струи не «держит» перепад давлений). Последующее расширение и ускорение потока на втором семействе характеристик приводит к такому его повороту, что в области 2 поток течет вдоль оси при $p_2 < p_{II}$. Последнее неравенство требует отражения упомянутых характеристик от границы струи в виде волн сжатия той же интенсивности. На них поток последовательно сжимается и поворачивается, в результате чего давление в зоне 3 становится равным противодавлению, а в зоне 4 – давлению на срезе сопла. Полученная

структура («бочка») в дальнейшем многократно повторяется. Заметим, что для простоты в схеме по рис. 9.20 не учтено взаимодействие волн при их пересечении.

Если сопло работает на режиме *перерасширения* ($p_c < p_{II}$), то при большой степени нерасчетности перерасширенная на срезе струя сжимается ударно на косых скачках уплотнения CB и $C'B$ (рис. 9.21,а) до давления p_{II} и течет к оси в областях 1 и 1', отделенных от окружающей среды границами струи CA и $C'A'$. Вторично эта струя ударно сжимается на «отраженных» скачках BA и BA' , принимает в зоне 2 осевое направление и давление $p_2 > p_{II}$. Упомянутые скачки отражаются от границ струи системой волн разрежения, так что, начиная с сечения AA' , поток приобретает структуру, показанную на рис. 9.20.

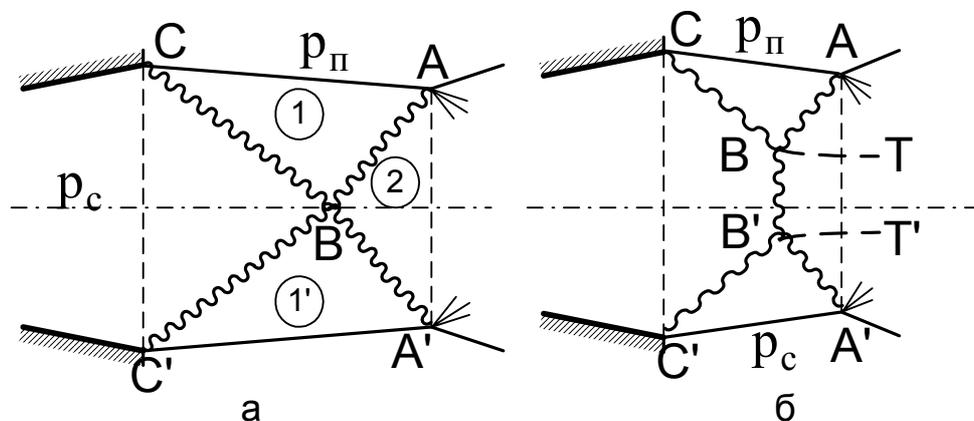


Рис. 9.21

С повышением противодавления увеличивается угол наклона скачков CB и $C'B$ к оси сопла, уменьшается скорость потока за ними и увеличивается угол поворота ϑ , который должны обеспечить скачки BA и BA' для придания потоку осевого направления в области 2. Когда этот угол становится больше ϑ_{max} (см. рис. 9.15), система косых скачков перестраивается в мостообразную (рис. 9.21,б) с прямым скачком в области оси и «отраженными» скачками BA и $B'A'$. Так же, как при маховском отражении от стенки (см. рис. 9.15,б) здесь возникают тангенциальные разрывы скорости BT и $B'T'$. При дальнейшем повышении противодавления размер прямой ударной волны BB' увеличивается и она приближается к срезу сопла. Когда величина p_{II}/p_c достигнет значения, отвечающего формуле (8.73), ударная волна разместится на срезе сопла, и сверхзвуковое истечение станет невозможным.

Глава 10. ДВУМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

10.1. Особенности описания пограничного слоя

10.1.1. Уравнения Прандтля

Движение континуума в погранслое, непосредственно прилегающем к поверхности твердого тела, имеет вихревой характер. Однако дифференциальные уравнения здесь проще, чем в системе (7.11), ввиду малой толщины этого непотенциального слоя. Многие задачи гидрогазодинамики решены именно в рамках теории погранслоя.

Получим, следуя Прандтлю, уравнения пограничного слоя для стационарного плоского изотермного течения несжимаемой вязкой среды при отсутствии массовых сил. Исходная система уравнений в этом случае имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0; \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right); \\ w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right). \end{array} \right. \quad (10.1)$$

Здесь плотность ρ и кинематическая вязкость ν среды есть заданные константы. Ограничиваясь течением в погранслое, упростим систему путем исключения тех членов уравнений, которые имеют относительно малую величину.

Примем, что порядок величины переменной x – продольный размер обтекаемого тела l , а переменной y – толщина пограничного слоя δ . В качестве порядка величины переменной w_x возьмем скорость w_{Π} на линии $y = \delta(x)$, отделяющей погранслоем от внешней (потенциальной) области. За порядок переменной p берем удвоенное динамическое давление ρw_{Π}^2 согласно интегралу Бернулли (9.3). Порядок величины «поперечной скорости» w_y определим из уравнения неразрывности, согласно которому $w_{\Pi} / l \sim w_y / \delta$, так

что $W_y \sim W_{\Pi} \delta / l$.

Оценивая величину членов второго уравнения, видим, что все они имеют порядок W_{Π}^2 / l , кроме двух последних, порядок величины которых равен $\nu W_{\Pi} / l^2$ и $\nu W_{\Pi} / \delta^2$ соответственно. Ввиду малости толщины пограничного слоя ($\delta \ll l$), из этих двух членов, характеризующих силы вязкости, первый много меньше; его мы отбрасываем. Основываясь на определении погранслоя как области, в которой силы инерции и вязкости имеют один порядок, заключаем, что оставшийся вязкий член $\nu W_{\Pi} / \delta^2 \sim W_{\Pi}^2 / l$.

Отсюда следует оценка *толщины пограничного слоя*:

$$\delta / l \sim 1 / \sqrt{\text{Re}_l}, \quad (10.2)$$

где $\text{Re}_l = \rho W_{\Pi} l / \mu$. Как видно, только при больших числах Рейнольдса справедлив тезис о малой толщине погранслоя.

Аналогичная оценка порядка величины членов проекции уравнения движения на ось y приводит к выражению

$$\partial p / \partial y = 0. \quad (10.3)$$

Следовательно, давление поперек пограничного слоя не меняется; оно равно давлению на линии $y = \delta(x)$, отделяющей погранслой от области потенциального течения.

С учетом отмеченного система уравнений (10.1) для пограничного слоя ($\delta / l \ll 1$, или $\text{Re}_l \gg 1$) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0; \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (10.4)$$

Здесь продольный градиент давления dp / dx известен из предварительного решения задачи потенциального обтекания тела: в первом приближении – исходного, во втором и последующих – тела, на контур которого «наращен» пограничный слой.

Систему (10.4) называют *уравнениями Прандтля для пограничного слоя*. Они записаны применительно к плоской стенке, но справедливы и для криволинейных стенок с малым изменением радиуса кривизны.

По сравнению с исходной системой (10.1) уравнения Прандтля существенно упрощены. Однако аналитическое решение их все еще

трудоемко даже для простейших случаев. В частности, очень сложно удовлетворить граничным условиям $w_x = 0$, $w_y = 0$ при $y = 0$ и $w_x = w_{\Pi}(x)$ при $y = \delta$. Кроме того, в записанной форме уравнения Прандтля пригодны только для ламинарного течения.

10.1.2. Интегральные соотношения. Условные толщины

Существует и другой подход к описанию течения в пограничном слое. В основе его лежат *интегральные соотношения*, получаемые применением законов сохранения к дифференциально малому элементу длины погранслоя. Этот подход приближенный, но он дает уравнения, справедливые для всех режимов течения и сравнительно просто решаемые.

Основным здесь является *уравнение импульсов*. Получим его для установившегося изотермного течения вязкой жидкости вдоль стенки малой кривизны (массовыми силами пренебрегаем). Применяя закон сохранения импульса к среде в контрольном объеме ABCD (рис.10.1), имеем в проекции на ось X:

$$\left[\int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy \right) dx \right] - \left[\int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy + w_{\Pi} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho w_x dy \right) dx \right] = -\tau_{ст} dx - \delta \frac{dp}{dx} dx.$$

Здесь $w_{\Pi} = w_{\Pi}(x)$ – скорость на линии $y = \delta(x)$; второй член в правых квадратных скобках есть умноженный на w_{Π} поток массы че-

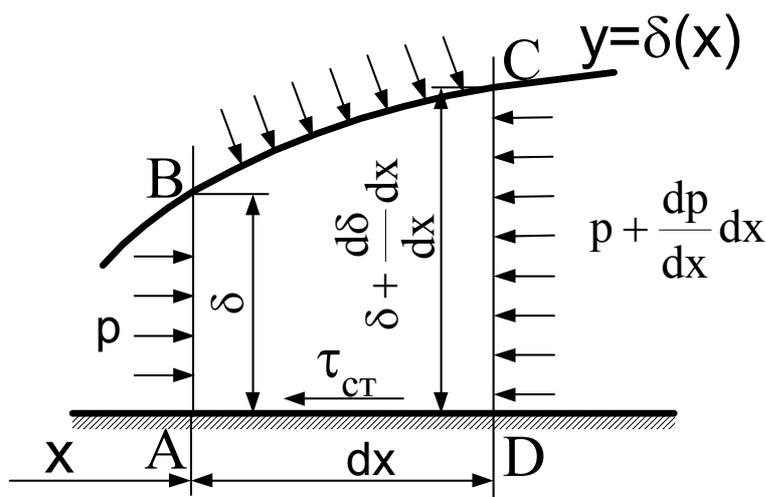


Рис. 10.1

рез поверхность BC; $\tau_{ст}$ – напряжение трения на стенке; последний член уравнения выражает проекцию на ось X результирующей силы давления. На линии BC давление и скорость взяты согласно теореме о среднем; силами трения здесь пренебрегаем.

Сократив первый и третий члены, после деления на dx преобразуем уравнение подстановкой соотношений

$$\frac{d}{dx} \left[w_{\Pi} \int_0^{\delta} \rho w_x dy \right] = \frac{dw_{\Pi}}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x dy + w_{\Pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x dy;$$

$$\frac{dp}{dx} = -\rho w_{\Pi} \frac{dw_{\Pi}}{dx}; \quad \delta = \int_0^{\delta} dy.$$

Это дает

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy - \frac{d}{dx} \left[w_{\Pi} \int_0^{\delta} \rho w_x dy \right] + \frac{dw_{\Pi}}{dx} \int_0^{\delta} \rho w_x dy -$$

$$- \rho w_{\Pi} \frac{dw_{\Pi}}{dx} \int_0^{\delta} dy = -\tau_{ст},$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[w_{\Pi}^2 \int_0^{\delta} \frac{w_x}{w_{\Pi}} \left(1 - \frac{w_x}{w_{\Pi}} \right) dy \right] + w_{\Pi} \frac{dw_{\Pi}}{dx} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{w_x}{w_{\Pi}} \right) dy = \frac{\tau_{ст}}{\rho}.$$

Обозначив первый интеграл δ^{**} и второй δ^* , имеем

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{w'_{\Pi}}{w_{\Pi}} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_{ст}}{\rho w_{\Pi}^2}. \quad (10.5)$$

Это выражение называют уравнением импульсов, или *интегральным соотношением Кармана* (здесь $w'_{\Pi} = dw_{\Pi} / dx$).

Упомянутые выше интегралы

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{w_x}{w_{\Pi}} \right) dy; \quad \delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{w_x}{w_{\Pi}} \left(1 - \frac{w_x}{w_{\Pi}} \right) dy \quad (10.6)$$

имеют размерность длины. Их именуют *толщиной вытеснения* (δ^*) и *толщиной потери импульса* (δ^{**}). Первая представляет собой расстояние, на которое надо отодвинуть поток от стенки при замене вязкой жидкости на невязкую, чтобы не изменился массовый расход во всем потоке. Толщина потери импульса – это дополнительное к δ^* расстояние, на которое следует отодвинуть поток при такой замене, чтобы осталось неизменным его количество движения. В справедливости этих утверждений можно убедиться, найдя δ^* и δ^{**} из равенств

$$\int_0^{\delta} \rho w_x dy = \rho w_{\Pi} (\delta - \delta^*), \quad \int_0^{\delta} \rho w_x^2 dy = \rho w_{\Pi}^2 (\delta - \delta^* - \delta^{**})$$

соответственно (они записаны применительно к рис. 10.2).

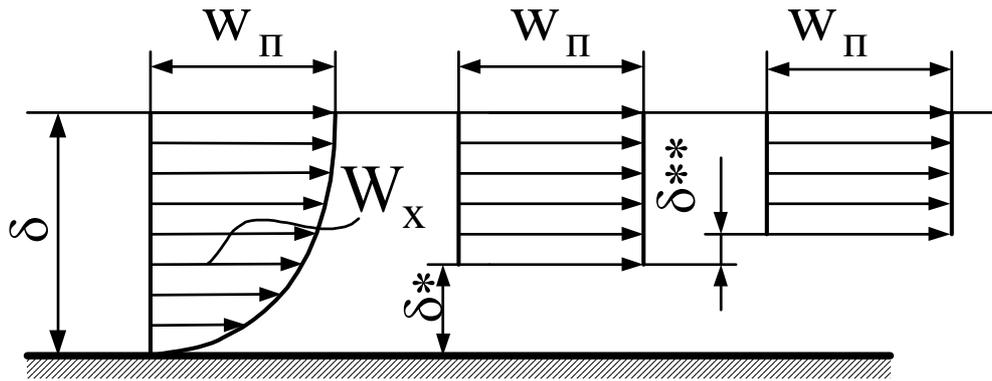


Рис. 10.2

Принято считать, что условные толщины δ^* и δ^{**} лучше характеризуют поперечный размер пограничного слоя, чем упомянутая ранее величина δ . Под нею подразумевалось расстояние от стенки до линии $y = \delta(x)$, на которой силами вязкости уже можно пренебречь (иначе говоря, на ней W_x мало отличается от W_Π). Однако скорость пограничного слоя переходит в скорость внешнего потенциального течения асимптотически (рис.10.2), и такое определение толщины погранслоя несколько произвольно.

Возвращаясь к уравнению импульсов (10.5), отметим, что оно содержит три неизвестных: δ^* , δ^{**} и τ_{CT} . Поэтому при использовании его дополнительно привлекают определения (10.6) и выражение для τ_{CT} . Последнее в случае ламинарного погранслоя записывают согласно закону (6.3), а для турбулентного берут из опыта. В связи с отмеченным решение задач теории пограничного слоя на основе интегрального соотношения Кармана возможно лишь при известном наперед профиле скорости в погранслое.

10.1.3. Аналогия между внешней и внутренней задачами

Этим профилем можно задаться, учтя условия $W_x = 0$
 $\partial^2 W_x / \partial y^2 = -W_\Pi W'_\Pi / \nu$ при $y = 0$ и $W_x = W_\Pi$,
 $\partial W_x / \partial y = 0$, $\partial^2 W_x / \partial y^2 = 0$ при $y = \delta$. Например, для ламинарного погранслоя были использованы различные одно- и дупараметрические семейства профилей скорости, давшие хорошее совпадение с точными решениями.

Логичным приемом задания профиля скорости в пограничном слое является использование *аналогии между внешней и внутренней за-*

дачами. Анализ уравнений ламинарного течения вблизи стенки показывает, что в обеих задачах профиль скорости здесь определяется напряжением трения на стенке τ_{CT} и безразмерным расстоянием от нее yW/v . Это позволяет утверждать, что профиль скорости в пограничном слое при обтекании тела будет таким же, как распределение скорости по радиусу для течения в трубе в случае одинаковых чисел Рейнольдса. При вычислении их толщину пограничного слоя δ считают эквивалентной радиусу трубы r_{CT} , а скорость W_{II} на границе слоя – эквивалентной скорости W_{OC} на оси трубы.

Первоначальный эксперимент подтвердил справедливость такой аналогии для всех режимов течения. Последующие более точные измерения выявили отклонение от нее во внешней части турбулентного пограничного слоя. Однако это отличие мало сказывается на таких интегральных величинах, как δ^* , δ^{**} , τ_{CT} .

В связи с этим ниже рассмотрено распределение скорости при ламинарном и турбулентном течении в цилиндрических трубах.

10.2. Ламинарный поток в круглой трубе

Изучим стационарное изотермное течение вязкой жидкости в цилиндрической трубе кругового поперечного сечения при отсутствии массовых сил. Осевая симметрия «запрещает» перетекание жидкости по окружности в поперечном сечении, а следовательно, и течение по радиусу. Если направить ось X вдоль трубы, то сказанное означает $w_y = w_z = 0$. При этом из уравнения неразрывности $\text{div } \vec{w} = 0$ следует $\partial w_x / \partial x = 0$ (такое течение называют стабилизированным, или *развитым*).

С учетом записанного проекции уравнения движения (7.8) на оси y и z дают $\partial p / \partial y = 0$ и $\partial p / \partial z = 0$ (давление поперек трубы не меняется), так что проекция этого уравнения на ось X имеет вид

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{dp}{dx}.$$

Левая и правая части этого уравнения зависят от разных аргументов. Это означает, что они порознь равны некоторой константе; ее разумно взять в виде $-\Delta p / l$, где Δp – потери давления на длине трубы l (см. подразд. 8.1.3). Перейдя к цилиндрическим координатам, получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{\mu l}.$$

Двойное интегрирование этого уравнения дает

$$w = - \frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + c_1 \ln r + c_2.$$

Значения констант находим из граничных условий. На оси трубы ($r = 0$) скорость конечна, поэтому $c_1 = 0$. На стенке ($r = r_{\text{CT}}$) вследствие «прилипания» жидкости $w_{\text{CT}} = 0$, так что $c_2 = (\Delta p / 4\mu l) r_{\text{CT}}^2$. В итоге распределение скорости по радиусу трубы имеет вид

$$w = \frac{\Delta p}{4\mu l} (r_{\text{CT}}^2 - r^2), \quad (10.7)$$

или в безразмерной форме

$$\frac{w}{w_{\text{OC}}} = 1 - \frac{r^2}{r_{\text{CT}}^2}, \quad (10.8)$$

где скорость на оси трубы $w_{\text{OC}} = (\Delta p / 4\mu l) r_{\text{CT}}^2$. Зависимость (10.8) называют *параболой Пуазейля*.

Сопоставив приведенную связь w_{OC} и Δp с формулой Дарси (8.10) и вычислив среднерасходную скорость

$$w_{\text{CP}} = \frac{1}{\pi r_{\text{CT}}^2} \int_0^{r_{\text{CT}}} w_{\text{OC}} \left(1 - \frac{r^2}{r_{\text{CT}}^2} \right) 2\pi r dr = w_{\text{OC}} / 2,$$

получим линейный коэффициент сопротивления при ламинарном течении в цилиндрической трубе кругового поперечного сечения

$$\xi = 64 / \text{Re}_d. \quad (10.9)$$

Эта формула выражает *закон сопротивления Хагена-Пуазейля*. Опыт подтверждает справедливость зависимостей (10.8), (10.9) как для гладких, так и для шероховатых труб.

Сопротивление можно также характеризовать напряжением трения на стенке, вычисляемым по условию равновесия:

$$\tau_{\text{CT}} = \frac{\Delta p r_{\text{CT}}}{2l} = \frac{2\mu w r_{\text{CT}}}{(r_{\text{CT}} - r)(r_{\text{CT}} + r)} \approx \frac{2\mu w}{2y} = \frac{\rho w^2}{2} \frac{2}{\rho w y / \mu},$$

или

$$\tau_{\text{CT}} = \frac{2}{(y_w / \nu)} \frac{\rho w^2}{2}, \quad (10.10)$$

где y_w / ν – безразмерное расстояние от стенки; здесь принято $y / r_{\text{CT}} \ll 1$. Последнюю формулу можно переписать в виде

$$w = \sqrt{\frac{\tau_{\text{CT}}}{\rho} \frac{y_w}{\nu}},$$

или

$$\frac{w}{w_{\text{д}}} = \sqrt{\frac{y_w}{\nu}}, \quad (10.11)$$

где *динамическая скорость*

$$w_{\text{д}} = \sqrt{\tau_{\text{CT}} / \rho}. \quad (10.12)$$

Как видно, распределение скорости в пристеночной зоне действительно определяется напряжением трения на стенке и безразмерным расстоянием от нее.

Развитому течению предшествует участок гидродинамической стабилизации, начинающийся на входе в трубу, где профиль скорости практически равномерен (рис. 10.3). Из-за вязкости жидкость у стенки тормозится, здесь начинает формироваться пограничный слой. В ядре потока профиль остается равномерным, а скорость возрастает в соответствии с законом сохранения массы. В сечении, где пограничные слои смыкаются, перестройка профиля скорости заканчивается. Далее имеет место развитое течение с паузейлевым распределением скоростей.

Длину участка гидродинамической стабилизации, или *начального* (входного) участка, определяют по эмпирической формуле

$$l_{\text{нач}} / d = 0,029 \text{Re}_d. \quad (10.13)$$

Потери давления здесь больше, чем при развитом течении вследствие затрат энергии на деформирование профиля скорости. Увеличение сопротивления учитывают умножением линейного коэффициента по формуле (10.9) на поправку k_{H} . Значения ее, как и коэффициента кинетической энергии α (см. подразд. 8.1.2), приведены на рис. 10.3.

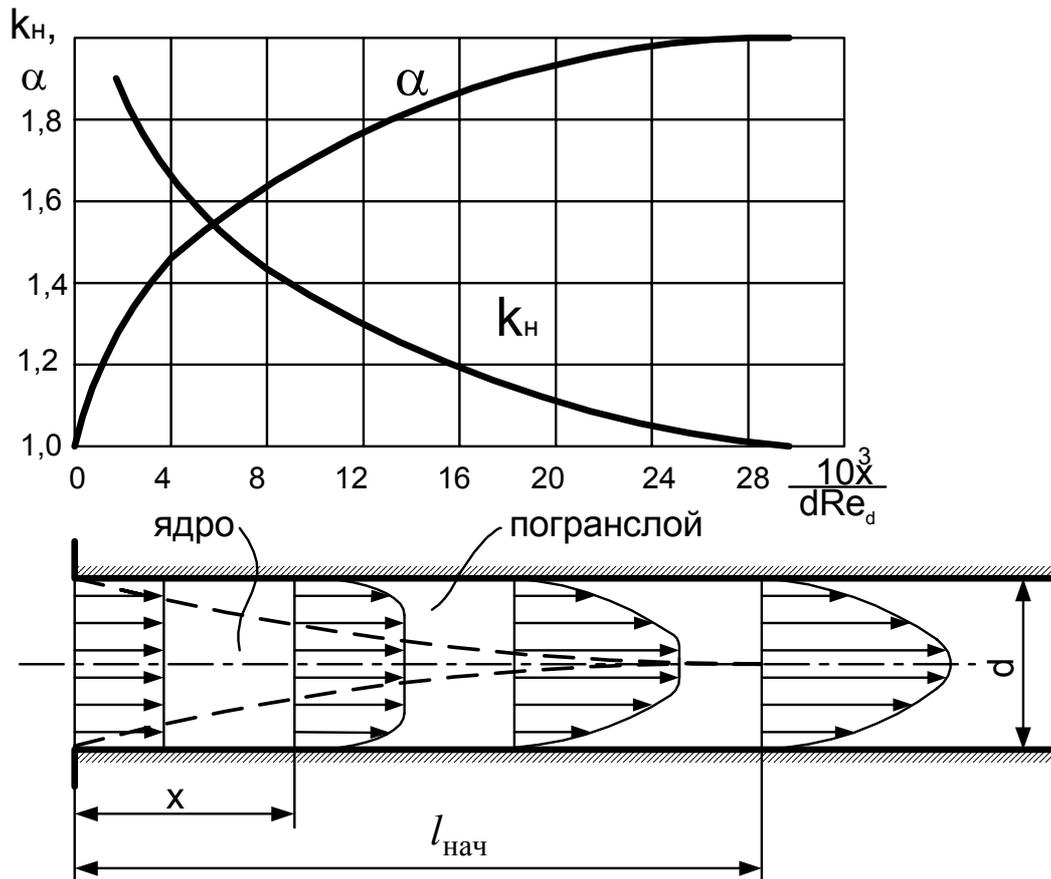


Рис. 10.3

Ламинарный режим течения в трубах сохраняется, пока число Рейнольдса не достигнет *критического* значения. Величина его зависит от степени возмущенности потока. Нижняя граница критических чисел Рейнольдса определена как $Re_d = 2300$.

10.3. Модели турбулентного течения в трубах

10.3.1. Логарифмический закон распределения скорости

Математические модели турбулентных течений являются приближенными; их обычно строят с использованием опытных данных.

Наиболее распространена модель, основанная на разработанной Прандтлем полуэмпирической теории пристеночной турбулентности.

Прандтль схематизировал механизм турбулентного переноса импульса следующим образом. Перенос осуществляют некоторые объемы жидкости, сохраняющие при пульсации (переходе из одного слоя осредненного движения в другой) свою «индивидуальность» (продольную составляющую импульса и скорость поперечной пульсации). Потеря ее происходит только после того, как объем пройдет некоторый «путь перемешивания», соизмеримый с характерным размером самого объема. Вызванная этой потерей продольная пульсация скорости определяется разностью осредненных скоростей старого и но-

вого слоев, отстоящих на *длину пути перемешивания* l_{III} . Предполагается также, что скорость поперечной пульсации совпадает по модулю с продольной пульсацией.

Применяя такую схематизацию к осредненному течению вязкой жидкости у стенки (рис. 10.4), получаем

$$|w'_x| = |\tilde{w}(y + l_{\text{III}}) - \tilde{w}(y)| \approx l_{\text{III}} \left| \frac{d\tilde{w}}{dy} \right|$$

;

$$|w'_y| = |w'_x| = l_{\text{III}} \left| \frac{d\tilde{w}}{dy} \right|.$$

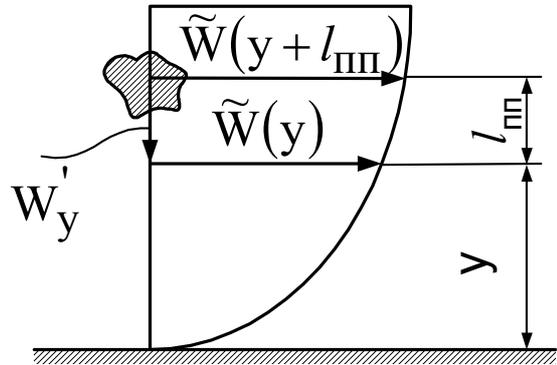


Рис. 10.4

Первое из этих выражений получено разложением скорости $\tilde{w}(y + l_{\text{III}})$ в ряд Тэйлора и исключением всех членов порядка выше первого.

Поскольку произведение $w'_i w'_j$ всегда отрицательно, компоненты тензора турбулентных напряжений (см. подразд. 7.5) положительны. Поэтому для рассматриваемого случая, исходя из определения турбулентной вязкости (7.26), можно записать:

$$\mu_T = \frac{\rho l_{\text{III}}^2 (d\tilde{w}/dy)^2}{d\tilde{w}/dy} = \rho l_{\text{III}}^2 (d\tilde{w}/dy). \quad (10.14)$$

Записав касательное напряжение $\tilde{\tau}$ по аналогии с законом (6.3)

$$\tau_T = \mu_T \frac{d\tilde{w}}{dy} = \rho l_{\text{III}}^2 \left(\frac{d\tilde{w}}{dy} \right)^2 \quad (10.15)$$

используем это выражение для расчета распределения скорости при развитом турбулентном течении жидкости в гладкой трубе. Примем, следуя Прандтлю, что вблизи стенки длина пути перемешивания $l_{\text{III}} = \chi y$, а напряжение трения (10.15) здесь неизменно вдоль y и равно напряжению на стенке $\tau_{\text{ст}}$. Тогда

$$\rho \chi^2 y^2 \left(\frac{d\tilde{w}}{dy} \right)^2 = \tau_{\text{ст}},$$

откуда

$$\frac{d\tilde{w}}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho}} \frac{1}{\chi y} = w_D \frac{1}{\chi y},$$

где W_D – динамическая скорость по определению (10.12). Интегрируя при $\chi = \text{const}$, имеем

$$\tilde{w} = w_D \frac{1}{\chi} \ln y + c_1,$$

или

$$\frac{\tilde{w}}{w_D} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{y w_D}{\nu} + c_2. \quad (10.16)$$

Таким образом, теория пути перемешивания и сделанные допущения о распределении l_{III} и τ_T по радиусу трубы приводят к логарифмическому профилю скорости. Он получен для пристеночной зоны, но хорошо подтверждается опытом на большей части сечения при $\chi = 0,4$; $c_2 = 5,5$.

Значения этих констант не зависят от числа Рейнольдса, поэтому *логарифмический закон распределения скорости* (10.16) называют универсальным.

Ему соответствует универсальный закон сопротивления, выводимый из условия равновесия жидкого цилиндра:

$$\tau_{CT} = \frac{\xi}{8} \rho w_{cp}^2 \quad (10.17)$$

(здесь Δp записано по формуле Дарси) с использованием выражения для среднерасходной скорости

$$w_{cp} = w_D \left(2,5 \ln \frac{r_{CT} w_D}{\nu} + 1,75 \right),$$

полученного интегрированием профиля (10.16) согласно (8.4). Переписав последнее выражение в виде

$$w_{cp} / w_D = 2,5 \ln \left(\frac{r_{CT} w_{cp}}{\nu} \frac{w_D}{w_{cp}} \right) + 1,75,$$

подставим в него отношение $w_D / w_{cp} = \sqrt{\xi/8}$, следующее из условия равновесия (10.17):

$$\sqrt{8/\xi} = 2,5 \ln \left(0,5 Re_d \sqrt{\xi/8} \right) + 1,75.$$

Заменив натуральный логарифм десятичным, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2,035 \lg(\text{Re}_d \sqrt{\xi}) - 0,91.$$

Опыт дает несколько иные значения констант:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2 \lg(\text{Re}_d \sqrt{\xi}) - 0,8. \quad (10.18)$$

Этот закон сопротивления Прандтля для гладких труб пригоден при всех «турбулентных» числах Рейнольдса.

10.3.2. Степенной закон распределения скорости

Полуэмпирический универсальный закон сопротивления (10.18) выражает зависимость ξ от Re в неявном виде. Этого недостатка лишен чисто опытный закон сопротивления Блазиуса для гладких труб

$$\xi = 0,3164 / \sqrt[4]{\text{Re}_d}, \quad (10.19)$$

который, однако, справедлив лишь до чисел Рейнольдса $\text{Re}_d = 10^5$. Течения с такими значениями Re встречаются часто, поэтому представляет интерес профиль скорости, отвечающий закону Блазиуса.

Подставив последний в условие равновесия жидкого цилиндра в форме (10.17), получим $\tau_{\text{CT}} = 0,0332 \rho^{3/4} \mu^{1/4} W_{\text{CP}}^{7/4} r_{\text{CT}}^{-1/4}$. Примем, что $W_{\text{CP}} = K \tilde{w}_{\text{OC}}$, а распределение скорости по y соответствует степенной функции:

$$\tilde{w} / \tilde{w}_{\text{OC}} = (y / r_{\text{CT}})^n. \quad (10.20)$$

Тогда выражение для τ_{CT} примет вид

$$\tau_{\text{CT}} = 0,0332 \rho^{3/4} \mu^{1/4} K^{7/4} \tilde{w}^{7/4} y^{-7n/4} r_{\text{CT}}^{7n/4} r_{\text{CT}}^{-1/4}.$$

Будем считать, что при турбулентном течении также справедлив вывод о независимости напряжения трения на стенке от радиуса трубы (так можно трактовать формулу (10.10)). В этом случае значение n в последнем соотношении необходимо принять равным $1/7$. Профиль скорости будет иметь вид

$$\tilde{w} / \tilde{w}_{\text{OC}} = (y / r_{\text{CT}})^{1/7}. \quad (10.21)$$

Следовательно, закон Блазиуса и предположение о том, что τ_{CT} не зависит от радиуса трубы, приводят к распределению скорости, называемому *законом корня седьмой степени*. Понятно, что он спра-

ведлив только до $Re_d = 10^5$.

Исследования развитого турбулентного течения в гладких трубах показывают, что профиль скорости на большей части сечения действительно можно считать степенным, однако показатель степени $1/7$ соответствует лишь числу Рейнольдса $Re_d \approx 10^5$, которому наиболее точно отвечает аппроксимация данных по сопротивлению труб в виде закона Блазиуса. При других значениях Re_d показатель степени не равен $1/7$: он меняется от $n = 1/6$ для $Re_d = 4 \cdot 10^3$ до $n = 1/10$ для $Re_d = 3,2 \cdot 10^6$.

Поэтому закон корня седьмой степени следует считать частным случаем *степенного закона распределения скорости* (10.20), а закон Блазиуса таким же случаем *общего степенного закона сопротивления*

$$\xi = c / Re^m \quad (10.22)$$

(величины n , c и m есть функции числа Рейнольдса).

Заметим, что профиль скорости при турбулентном течении более наполнен, чем при ламинарном: для параболы Пуазейля отношение среднерасходной скорости к осевой равно $1/2$, а в случае закона корня седьмой степени $w_{cp} / \tilde{w}_{oc} = 0,817$. Это объясняется интенсивным обменом импульсом между слоями за счет турбулентных пульсаций. В результате турбулентного перемешивания кинетическая энергия пристеночных слоев увеличивается, и это вызывает более крутое нарастание скорости у стенки. Выравнивание профиля скорости в турбулентном потоке тем сильнее, чем больше число Рейнольдса.

10.3.3. Трехслойная модель турбулентного течения в трубе

Экспериментальные исследования распределения скорости при турбулентном течении в трубах показывают, что как степенной, так и логарифмический законы не выполняются в непосредственной близости от стенки. Последняя «гасит» турбулентные пульсации, вследствие чего при $y w_d / \nu < 5$ течение может рассматриваться как ламинарное; эту область называют ламинарным, или *вязким подслоем*. Толщина его столь мала, что параболическое распределение скорости здесь можно заменить линейным.

Безразмерным расстояниям от стенки $5 < y w_d / \nu < 70$ отве-

чает *переходный слой*, в котором молекулярная и турбулентная вязкости имеют один порядок. В пределах его линейный профиль скорости постепенно переходит в логарифмический.

При $uw_D / \nu > 70$ определяющее влияние оказывает турбулентная вязкость, так что в этом наибольшем слое, занимающем *основную часть сечения*, распределение скорости хорошо совпадает с логарифмическим законом, при выводе которого учитывались только турбулентные напряжения.

В целях упрощения расчетов описанную трехслойную модель турбулентного течения в трубах часто заменяют двухслойной, считая, что течение состоит из вязкого подслоя и чисто турбулентной области. Тогда границу вязкого подслоя определяют по точке пересечения линейного профиля скорости у стенки с логарифмическим в основной части сечения. Это дает для толщины вязкого подслоя и скорости на его границе:

$$\delta_{\text{ВП}} \approx 12\nu / w_D; \quad w_{\delta_{\text{ВП}}} \approx 12w_D. \quad (10.23)$$

Последнее выражение получено подстановкой соотношения для $\delta_{\text{ВП}}$ в закон (6.3) с учетом линейного распределения скорости в вязком подслое. Вследствие этой линейности напряжение трения здесь $\tau = \mu w_{\delta_{\text{ВП}}} / \delta_{\text{ВП}}$ неизменно и равно $\tau_{\text{СТ}}$. Число Рейнольдса, составленное по скорости на границе вязкого подслоя и его толщине, достаточно мало ($Re_{\text{ВП}} = 144$), что подтверждает наличие здесь ламинарного течения.

10.3.4. Начальный участок. Влияние шероховатости

Все сказанное выше касается развитого турбулентного течения в гладких трубах.

На входном (начальном) участке, длина которого, по данным Никурадзе, составляет при турбулентном режиме от 25 до 40 диаметров, происходит деформация профиля скорости, аналогичная описанной в подразд. 10.2. Это увеличивает сопротивление, что учитывают умножением ξ для развитого течения на коэффициент $k_H > 1$. Значения его можно найти в справочниках.

Там же имеются данные по сопротивлению шероховатых труб при турбулентном течении.

10.4. Основные задачи теории пограничного слоя

10.4.1. Пограничный слой на плоской пластине

Схема пограничного слоя при продольном обтекании пластины параллельным потоком показана на рис.10.5. Около передней кромки профиль скорости равномерен. «Прилипание» частиц жидкости к «стенке» вызывает уменьшение скорости возле нее. Толщина этого «подторможенного» слоя δ постепенно возрастает вдоль пластины.

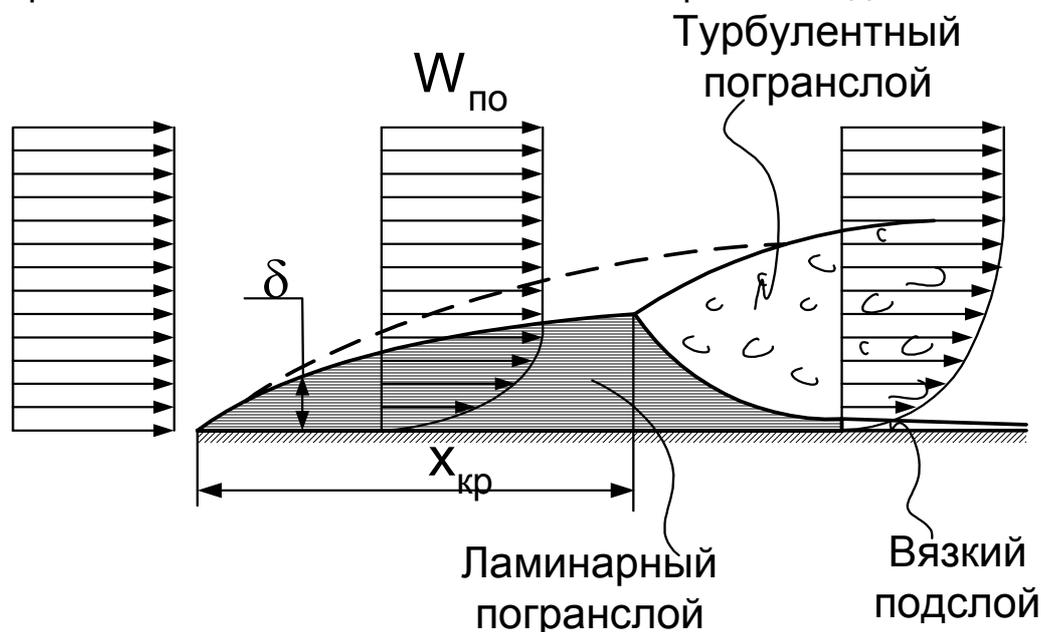


Рис. 10.5

При малой толщине формирующегося пограничного слоя градиент скорости dw/dy настолько велик, что силы вязкости $\tau = \mu dw/dy$ определяют ламинарный режим течения в погранслое. Однако при некоторой толщине последнего $\delta_{кр}$ (на расстоянии $X_{кр}$ от передней кромки пластины) число Рейнольдса $Re_x = \rho w_{по} x / \mu$ достигает критического значения, и течение в пограничном слое становится турбулентным. Признаком перехода является резкое увеличение толщины погранслоя и касательного напряжения на стенке. Значение $Re_{кр}$ зависит от степени возмущенности внешнего потока. Нижняя граница критических чисел Рейнольдса для пограничного слоя определена как $Re_x = 3,2 \cdot 10^5$.

Задачу о ламинарном погранслое на плоской пластине решим с использованием интегрального соотношения Кармана (10.5). Для плоской пластины, обтекаемой потенциальным потоком с постоянной скоростью $W_{по}$, оно принимает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_{ст}}{\rho w_{\Pi}^2}. \quad (10.24)$$

Подставим в него толщину потери импульса (10.6), взяв распределение скорости w_x / w_{Π} по аналогии с внутренней задачей. Параболу Пуазейля (10.8) перепишем в функции расстояния от стенки y :

$$\frac{w}{w_{oc}} = 1 - \frac{r^2}{r_{ст}^2} = 1 - \left(\frac{r_{ст} - y}{r_{ст}} \right)^2 = 2 \frac{y}{r_{ст}} - \left(\frac{y}{r_{ст}} \right)^2.$$

Следовательно, профиль скорости в пограничном слое

$$\frac{w_x}{w_{\Pi}} = 2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2. \quad (10.25)$$

Тогда уравнение (10.24) запишется как

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left[2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \left[1 - 2 \frac{y}{\delta} + \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] dy = \frac{\tau_{ст}}{\rho w_{\Pi}^2}.$$

Обозначив $y / \delta = z$, получаем

$$\frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (2z - z^2)(1 - 2z + z^2) dz = \frac{\tau_{ст}}{\rho w_{\Pi}^2},$$

или $(2/15)d\delta/dx = \tau_{ст} / (\rho w_{\Pi}^2)$. Но согласно закону (6.3)

$$\tau_{ст} = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{2w_{\Pi}}{\delta}.$$

Подстановка этой зависимости в предыдущее выражение и интегрирование его при очевидном условии $\delta=0$ для $x=0$ дает

$$\delta = 5,48x / \sqrt{Re_x}. \quad (10.26)$$

Заменяв формулой (10.26) значение δ в зависимости для $\tau_{ст}$, получаем *местный коэффициент сопротивления трения*:

$$c_{fx} = \frac{\tau_{ст}}{\rho w_{\Pi}^2 / 2} = \frac{0,73}{\sqrt{Re_x}}.$$

Далее вычисляем *интегральный коэффициент сопротивления трения пластины*

$$c_{fl} = \frac{1}{l} \int_0^l c_{fx} dx = \frac{1,46}{\sqrt{Re_l}}.$$

Опытные данные для c_{fl} приводят к следующему результату:

$$c_{fl} = 1,328 / \sqrt{Re_l} . \quad (10.27)$$

Эту зависимость называют *законом сопротивления Блазиуса для пластины*; она справедлива и при наличии шероховатости.

Условные толщины для взятого распределения скорости выражаются через δ таким образом:

$$\delta^* = 0,333\delta; \quad \delta^{**} = 0,133\delta. \quad (10.28)$$

Задачу о *турбулентном погранслое на плоской пластине* решаем, используя уравнение (10.24) и аналогию, упомянутую в подразд. 10.1.3. Примем, что скорость в пограничном слое распределена по закону корня седьмой степени:

$$\frac{\tilde{w}_x}{w_{\Pi}} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}. \quad (10.29)$$

По предыдущей схеме решения получаем

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\tau_{ст}}{\rho w_{\Pi}^2}.$$

Напряжение трения на стенке вычислим так же, как в подразд. 10.3.2, с подстановкой $w_{ср} = 0,817\tilde{w}_{ос}$ и заменой $\tilde{w}_{ос}$ на w_{Π} , а $r_{ст}$ на δ . В итоге имеем

$$\frac{\tau_{ст}}{\rho w_{\Pi}^2} = \frac{0,0225}{Re_{\delta}^{0,25}}.$$

Подстановка этой формулы в предыдущее выражение дает

$$\delta^{1/4} d\delta = 0,231 \left(\frac{v}{w_{\Pi}} \right)^{1/4} dx.$$

Приняв, что турбулентный погранслой начинается с передней кромки пластины ($\delta = 0$ при $x = 0$), интегрированием получаем

$$\delta = 0,37x / \sqrt[5]{Re_x} . \quad (10.30)$$

Далее нетрудно найти значения

$$c_{fx} = 0,058 / \sqrt[5]{Re_x} ; \quad c_{fl} = 0,072 / \sqrt[5]{Re_l} .$$

Опыт дает

$$c_{fl} = 0,074 / \sqrt[5]{Re_l}. \quad (10.31)$$

Эту зависимость называют *законом сопротивления Прандтля для гладкой пластины*.

Условные толщины при законе корня седьмой степени вычисляют по соотношениям

$$\delta^* = 0,125\delta; \quad \delta^{**} = 0,097\delta. \quad (10.32)$$

В связи с ограничениями на применение закона корня седьмой степени для труб, полученные результаты справедливы до значений числа Рейнольдса $Re_x \leq 10^7$.

Универсальный закон сопротивления можно получить, используя логарифмическое распределение скорости. Решение задачи при этом сильно усложняется. Результаты соответствующего численного расчета Шлихтинг представил интерполяционной формулой:

$$c_{fl} = 0,455 / (\lg Re_l)^{2,58}. \quad (10.33)$$

Этот *закон сопротивления Прандтля–Шлихтинга для гладкой пластины* хорошо согласуется с опытом.

Формулы (10.30) и (10.31) справедливы при условии, что турбулентный погранслои начинается с передней кромки пластины. Однако в действительности пограничный слой вблизи этой кромки всегда ламинарный (рис. 10.5).

Коэффициент сопротивления пластины с таким *смешанным погранслоем* обычно рассчитывают, пользуясь предположением Прандтля о том, что турбулентный погранслои за точкой перехода такой же, как если бы он начинался с передней кромки пластины (штриховая линия на рис. 10.5). При этом подтверждаемая опытом формула для интегрального коэффициента сопротивления имеет вид

$$c_{f_{см}} = c_{f_T} - \frac{Re_{кр}}{Re_l} (c_{f_T} - c_{f_l}) Re_{кр}. \quad (10.34)$$

Здесь индексы «см», «т» и «л» относятся к смешанному, турбулентному и ламинарному погранслоям соответственно; индекс « $Re_{кр}$ » означает, что коэффициенты c_{f_T} и c_{f_l} в скобках вычислены по числу Рейнольдса $Re_{кр}$.

10.4.2. Влияние продольного градиента давления

Математические модели течения в пограничном слое на плоской пластине и вытекающие из них законы сопротивления могут быть использованы в первом приближении и при наличии продольного градиента давления (обтекание телесных профилей, течение в соплах и диффузорах), когда он невелик. Если продольный градиент давления значителен, его следует учитывать, что существенно осложняет решение задачи. Ситуация становится крайне затруднительной в случаях, когда возникает *отрыв пограничного слоя*. Это явление характерно для областей с положительным градиентом давления (*диффузорные течения*). При $dp/dx < 0$ (зоны конфузторного течения) отрыва не происходит.

Для выяснения «механизма» отрыва погранслоя рассмотрим течение с $dp/dx > 0$ (например, возле хвостовой части лопаточного профиля). При таком течении запас кинетической энергии жидкости расходуется на преодоление противодействия, а в пограничном слое еще и на компенсацию работы вязких сил. Это ведет к понижению скорости частиц по мере их движения вдоль стенки. На линиях тока, расположенных ближе к стенке, где силы трения больше, а кинетическая энергия частиц меньше, возможен полный останов частиц (рис. 10.6, профиль C) и последующее их движение вспять под

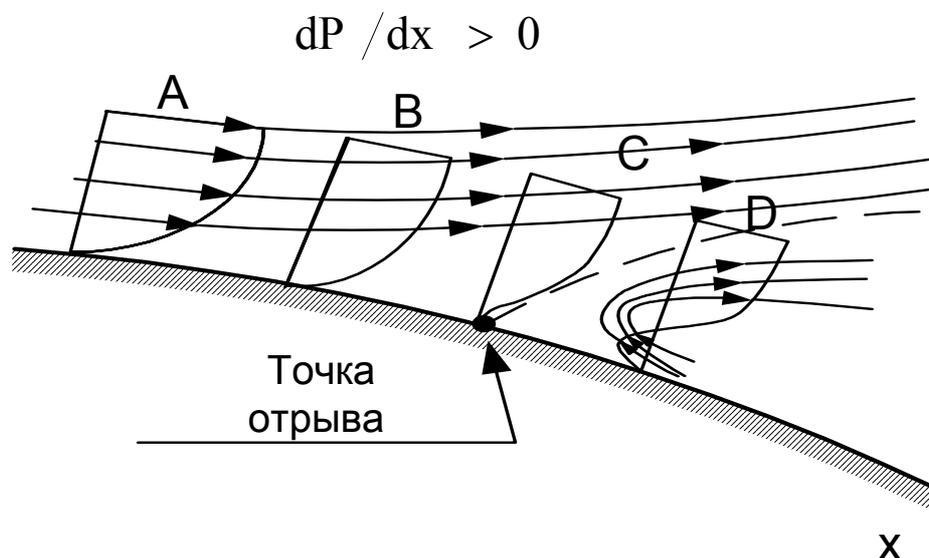


Рис. 10.6

действием противодействия (рис. 10.6, профиль D). Встречное пристеночное течение оттесняет «основную» погранслою от стенки – происходит его отрыв. Вид профиля D на рис. 10.6 свидетельствует о возможности образования здесь достаточно мощных вихрей. Фотографии обтекания тел с большими градиентами давления в кормовой области и течений в диффузорах с большими углами раскрытия подтверждают это предположение.

Отрыв пограничного слоя с образованием вихрей снижает полное

и статическое давление по сравнению с их значениями при безотрывном течении. Полное давление уменьшается вследствие диссипации энергии из-за возникновения вихрей. Понижение статического давления вызвано тем, что область отрыва не позволяет основному потоку заполнить все проходное сечение. Указанные обстоятельства ведут к уменьшению эффективности диффузоров и появлению дополнительного сопротивления при внешнем обтекании тел. Это *сопротивление давления* во много раз превышает сопротивление трения, вычисленное по приведенным выше выражениям для C_f .

Кардинальное изменение картины течения при отрыве пограничного слоя делает невозможным применение изложенной выше теории, основанной на предположении о малой толщине погранслоя. Отрыв резко меняет течение не только в пограничном слое, но и во внешней области течения.

Поэтому теоретическое рассмотрение течения в пограничном слое с продольным градиентом давления возможно лишь при отсутствии отрыва. По сравнению с обтеканием пластины задача существенно усложняется даже в случае применения интегральных соотношений, так как уравнение Кармана сохраняет здесь все члены.

Непеременной составляющей решения задачи о погранслое с градиентом давления $dp/dx > 0$ является установление возможности отрыва пограничного слоя. Исследования показывают, что ламинарный погранслоем отрывается при условии

$$\frac{dp}{dx} \frac{(\delta^*)^2}{\mu w_{\Pi}} \geq 1,92; \quad \frac{dp}{dx} \frac{(\delta^{**})^2}{\mu w_{\Pi}} \geq 0,157.$$

Отрыву турбулентного погранслоя отвечают соотношения

$$\frac{dp}{dx} \frac{\delta^*}{\rho w_{\Pi}^2} \geq 0,015; \quad \frac{dp}{dx} \frac{\delta^{**}}{\rho w_{\Pi}^2} \geq 0,005.$$

Приведенные величины называют *формпараметрами*. Они составлены из основных факторов, определяющих возможность отрыва, а при его наличии – положение точки отрыва. К ним относятся градиент давления и наполненность профиля скорости в погранслое, которая может быть охарактеризована соотношением условных толщин δ^* и δ^{**} .

Эта наполненность лучше у турбулентного погранслоя, поэтому он устойчивее к отрыву (здесь больше кинетическая энергия пристенных слоев).

10.4.3. Влияние сжимаемости среды

Все сказанное ранее о пограничном слое относилось к движению жидкости. Многие из него сохраняют силу и при течении газа, в частности, вывод об отсутствии поперечного градиента давления и оценка для толщины погранслоя.

Условные толщины здесь вводят с поправкой на сжимаемость:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho w_x}{\rho_{\Pi} w_{\Pi}} \right) dy; \quad (10.35)$$

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho w_x}{\rho_{\Pi} w_{\Pi}} \left(1 - \frac{w_x}{w_{\Pi}} \right) dy \quad (10.36)$$

(ρ и ρ_{Π} - плотность в погранслое и во внешней области течения).

Уравнение импульсов (10.5) для сжимаемой среды принимает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{w'_{\Pi}}{w_{\Pi}} (2\delta^{**} + \delta^* - M_{\Pi}^2 \delta^{**}) = \frac{\tau_{CT}}{\rho_{\Pi} w_{\Pi}},$$

где число Маха определено по параметрам внешней области.

При исследовании пограничного слоя в газе вводят еще *интегральное соотношение энергии*, которое в простейшем случае теплоизолированной стенки записывается так:

$$\frac{d\delta^{***}}{dx} + \frac{w'_{\Pi}}{w_{\Pi}} \left[3\delta^{***} + 2\delta^{****} - M_{\Pi}^2 \delta^{***} \right] = \frac{2}{\rho_{\Pi} w_{\Pi}^3} \int_0^{\delta} \tau \frac{\partial w_x}{\partial y} dy.$$

В него включены дополнительные условные толщины пограничного слоя:

– *толщина потери энергии*

$$\delta^{***} = \int_0^{\delta} \frac{\rho w_x}{\rho_{\Pi} w_{\Pi}} \left(1 - \frac{w_x^2}{w_{\Pi}^2} \right) dy;$$

– *толщина увеличения энтальпии*

$$\delta^{****} = \int_0^{\delta} \frac{\rho w_x}{\rho_{\Pi} w_{\Pi}} \left(\frac{i}{i_{\Pi}} - 1 \right) dy,$$

где i и i_{Π} – энтальпия газа в погранслое и во внешней области.

Систему интегральных соотношений импульса и энергии дополняют уравнением состояния газа и *зависимостью вязкости от температуры*. Обычно принимают $p = \rho RT$ и

$$\mu / \mu_0 = (T / T_0)^n, \quad (10.37)$$

где индексом «0» обозначена некоторая «реперная» температура.

Кроме требований $w = 0$ при $y = 0$ и $w = w_{\Pi}$ при $y = \delta$ здесь еще выставляют граничные условия для температуры.

Введение всех указанных изменений обусловлено тем, что при скоростях течения, соответствующих проявлению сжимаемости, наблюдается существенное изменение температуры в погранслое, обусловленное вязким торможением газа. Зону, в которой температура газа отличается от значения ее T_{Π} во внешней области, называют *тепловым пограничным слоем*. Отношение его толщины δ_T к толщине погранслоя δ зависит от числа Прандтля (здесь $Pr < 1$, так что $\delta_T > \delta$).

В случае теплоизолированной стенки температура газа поперек теплового пограничного слоя изменяется от T_{Π} при $y = \delta_T$ до *эффективной температуры* на стенке

$$T_e = T_{\Pi} \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_{\Pi}^2 \right),$$

где r – коэффициент восстановления, который учитывает отличие повышения температуры вследствие вязкого торможения в погранслое от прироста ее (согласно формуле (8.31)) при полном адиабатном торможении. Коэффициент восстановления приближенно определяют по соотношениям $r = \sqrt{Pr}$ и $r = \sqrt[3]{Pr}$ в случаях ламинарного и турбулентного течений соответственно.

Решение задачи о пограничном слое в газе существенно усложняется по сравнению со случаем несжимаемой среды. Здесь известны различные точные и приближенные методы, имеющие ту или иную степень универсальности. Для ламинарного погранслоя хорошие результаты дает метод, в котором уравнениям пограничного слоя придают почти такой же вид, как при несжимаемом течении, посредством преобразования Дородницына-Стюартсона. При расчете турбулентного погранслоя чаще всего идут по пути обобщения полуэмпирических теорий турбулентности на сжимаемую среду.

В случае плоской пластины напряжение трения на стенке и толщину пограничного слоя при течении газа можно определять по формулам для жидкости, если плотность и вязкость газа в них брать при *«определяющей» температуре*

$$T_{\text{опр}} = T_{\Pi} \left(1 + 0,72r \frac{k-1}{2} M_{\Pi}^2 \right)$$

(эта формула отвечает теплоизолированной пластине).

Такой прием приводит к следующим формулам пересчета:

$$\frac{\delta_{\Gamma}}{\delta} = \left(\frac{T_{\text{опр}}}{T_{\Pi}} \right)^{(n+1)/2} ; \quad \frac{c_{f_{\Gamma}}}{c_f} = \left(\frac{T_{\text{опр}}}{T_{\Pi}} \right)^{(n-1)/2}$$

– для ламинарного погранслоя и

$$\frac{\delta_{\Gamma}}{\delta} = \left(\frac{T_{\text{опр}}}{T_{\Pi}} \right)^{(n+1)/5} ; \quad \frac{c_{f_{\Gamma}}}{c_f} = \left(\frac{T_{\text{опр}}}{T_{\Pi}} \right)^{(n-4)/5}$$

– для турбулентного. Здесь δ и c_f соответствуют приведенным ранее зависимостям для жидкости; напряжение трения на стенке в случае газа $\tau_{\text{сТ}_{\Gamma}} = 2c_{f_{\Gamma}} \rho_{\Pi} w_{\Pi}^2$.

По данным измерений, с увеличением числа Маха толщина пограничного слоя возрастает, а наполненность профиля скорости уменьшается. Это объясняется тем, что рост M ведет к уменьшению плотности и увеличению вязкости газа из-за большего его подогрева. По той же причине в турбулентном погранслое вязкий подслой тем толще, чем выше число Маха. Уменьшение наполненности профиля скорости приводит к существенному снижению $c_{f_{\Gamma}}$ несмотря на рост вязкости.

С ростом числа Маха толщина вытеснения (10.35) увеличивается, а толщина потери импульса (10.36) уменьшается за счет падения плотности газа. Для наиболее важного случая турбулентного пограничного слоя на плоской пластине отношения δ^* / δ и δ^{**} / δ в газе можно определить по рис. 10.7.

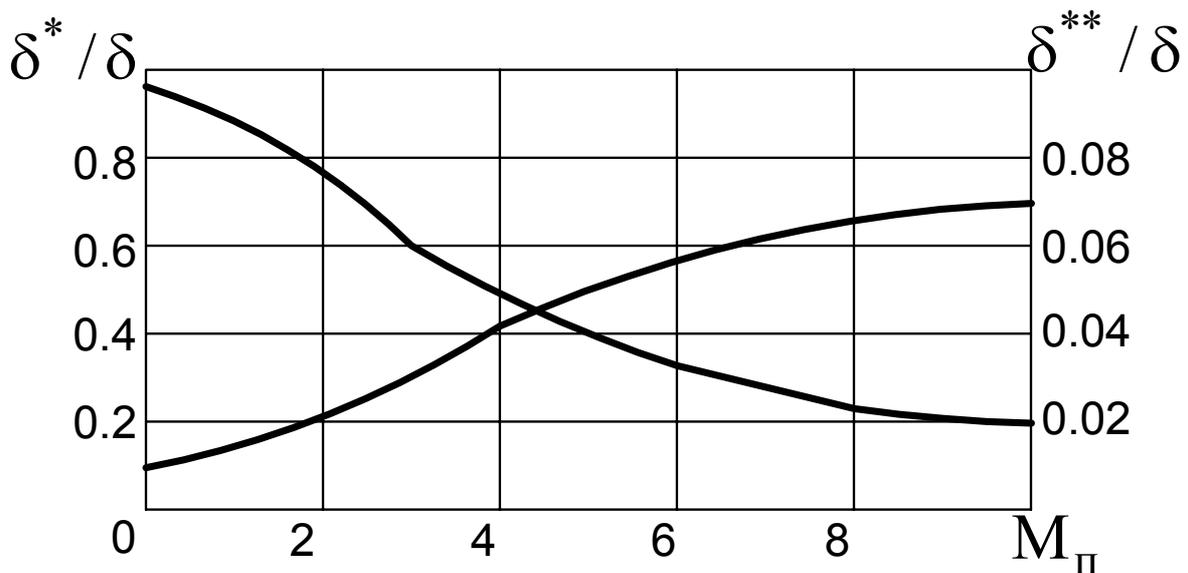


Рис. 10.7

10.4.4. Взаимодействие пограничного слоя

со скачками уплотнения

В подразд. 9.5.5 рассмотрено отражение скачков от стенки в предположении ее потенциального обтекания. В действительности скачок возле стенки всегда встречается с пограничным слоем.

Опыт показывает, что скачок и погранслои существенно влияют друг на друга. Резкое возрастание давления при переходе внешнего потока через скачок приводит к увеличению толщины пограничного слоя и к его отрыву. Особенно сильно взаимодействие скачков с ламинарным погранслоем.

Рассмотрим схему взаимодействия падающего на стенку косо скачка уплотнения с пограничным слоем, когда последний отрывается с последующим присоединением к стенке (рис. 10.8).

Поскольку скорость по толщине пограничного слоя уменьшается в направлении к стенке, интенсивность упавшего скачка I в той части погранслоя, где скорость еще сверхзвуковая, снижается по мере приближения к стенке. Скачок здесь искривляется и на звуковой линии тока ($W_x = a$) исчезает. Вследствие изменения интенсивности скачка в пограничном слое за скачком возникает поперечный градиент давления ($\partial p / \partial y \neq 0$).

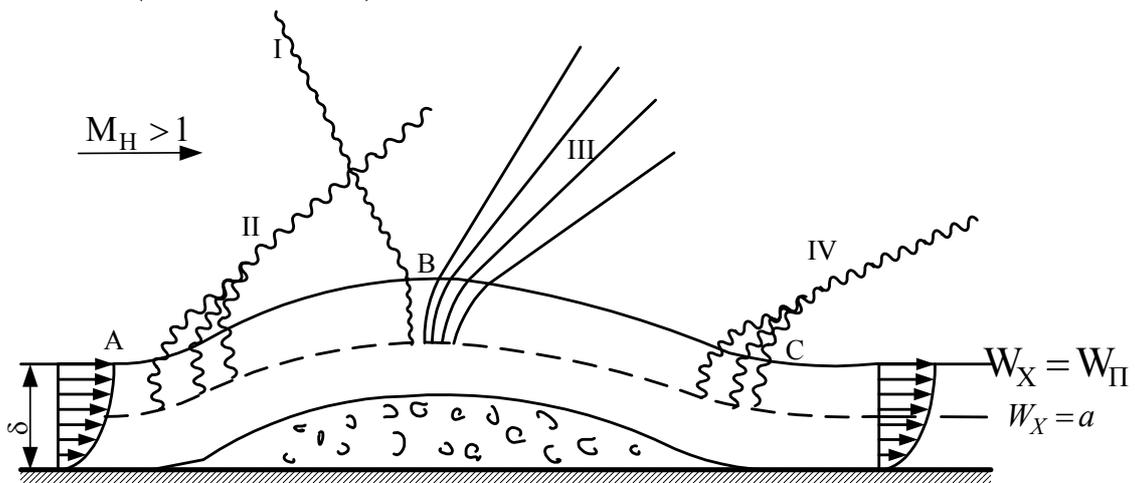


Рис. 10.8

По дозвуковой части погранслоя противодействие передается вверх по потоку, создавая встречный перепад давления влево от точки падения скачка на пограничный слой. В результате такой «диффузии» давления толщина погранслоя здесь увеличивается, а при достаточно сильном противодействии (большой интенсивности скачка I) происходит отрыв пограничного слоя перед скачком. В дальнейшем отрыв может сохраниться, но может произойти и локализация зоны отрыва, так как поперечный градиент давления за скачком стремится «прижать» поток к стенке.

Такое взаимодействие пограничного слоя с упавшим на него скач-

ком приводит к образованию криволинейной внешней границы погранслоя, показанной на рис. 10.8 для случая присоединения пограничного слоя к стенке после отрыва. Согласно подразд. 9.4.2, обтекание этой границы внешним потенциальным сверхзвуковым потоком создаст волны сжатия в зонах А и С и волны разрежения в зоне В. Системы волн сжатия дадут скачки II и IV, которые принято рассматривать как первый и второй отраженные скачки. Точно так же и систему волн разрежения III рассматривают как еще одно отражение основного скачка.

Схема, приведенная на рис. 10.8, применима как к ламинарному, так и к турбулентному погранслоям независимо от причины возникновения основного скачка (падающий извне скачок или образующийся при обтекании рассматриваемой стенки). Однако вследствие большей наполненности профиля скорости турбулентный погранслой менее склонен к отрыву, тем более, что дозвуковая область его тоньше, что затрудняет передачу давления против течения.

Все сказанное позволяет утверждать, что взаимодействие пограничного слоя со скачками приводит к нарушению основных положений как теории пограничного слоя, так и теории прямолинейных скачков. Действительно, здесь не выполняется условие $\partial p / \partial y = 0$, а производная $\partial w_x / \partial x$ имеет тот же порядок, что и $\partial w_x / \partial y$. В теории прямолинейных скачков интенсивность скачка считают неизменной вдоль его фронта, но при встрече с пограничным слоем скачок меняет свою интенсивность.

Поэтому теоретическое исследование пограничного слоя, взаимодействующего со скачком, крайне затруднено и носит в основном качественный характер. Тем не менее имеются приближенные теории, удовлетворительно подтвержденные опытом. Их рассматривают в специальной литературе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика: В 2 ч. – М.: Наука, 1991. – Ч. 1. 557с. Ч. 2. – 301 с.

Борисенко А.И. Газовая динамика двигателей. – М.: Оборонгиз, 1962. – 793 с.

Дейч М.Е. Техническая газодинамика. – М.: Энергия, 1974. – 592 с.

Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. – М.: Машиностроение, 1978. – 463 с.

Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1975. – 559 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.

Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Энергия, 1974. – 592 с.

- Повх И.Л. Техническая гидромеханика. – М.: Машиностроение, 1976. – 504 с.
- Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Иноиздат, 1951. – 575 с.
- Самойлович Г.С. Газодинамика. – М.: Машиностроение, 1990. – 382 с.
- Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
- Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. – М.: Наука, 1976. – Т.1. 535 с. Т. 2. – 576 с.
- Сергель О.С. Прикладная газодинамика. – М.: Машиностроение, 1980. – 374 с.
- Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. – М.: Наука, 1964. – 814 с.
- Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. – М.: Гостехтеориздат, 1963. – 463 с.
- Френкель Н.З. Гидравлика. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1956. – 456 с.
- Черный Г.Г. Газовая динамика. – М.: Наука, 1988. – 424 с.
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 711 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 6.	СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ КОНТИНУУМА.....	3
6.1.	Гипотеза сплошности.....	3
6.2.	Кинематические характеристики континуума.....	8
6.3.	Динамические характеристики сплошной среды.....	14
Глава 7.	ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ И УРАВНЕНИЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ.....	19
7.1.	Законы сохранения массы, импульса, энергии.....	19
7.2.	Дифференциальные уравнения	20
7.3.	Краевая задача гидродинамики.....	25
7.4.	Критериальная форма уравнений.....	29
7.5.	Уравнения для турбулентных потоков.....	32
Глава 8.	ОДНОМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА.....	36
8.1.	Одномерное описание потоков жидкости.....	36
8.2.	Уравнения одномерных течений газа.....	39
8.3.	Газодинамические функции.....	43
8.4.	Математическая модель прямого скачка.....	53
8.5.	Закон обращения воздействий.....	57
8.6.	Течения газа с воздействиями.....	59
Глава 9.	ДВУМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ.....	68
9.1.	Особенности описания потенциальных течений жидкости.....	68
9.2.	Силовое взаимодействие потенциального потока жидкости с твердым телом.....	73
9.3.	Система уравнений и граничные условия для потенциальных течений газа.....	79
9.4.	Линеаризованные модели потоков газа.....	83
9.5.	Течения газа с конечными возмущениями.....	91
Глава 10.	ДВУМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ.....	106
10.1.	Особенности описания пограничного слоя.....	106
10.2.	Ламинарный поток в круглой трубе.....	111
10.3.	Модели турбулентного течения в трубах.....	114
10.4.	Основные задачи теории пограничного слоя.....	120
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	130